STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1961 - 005

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Dr. C.G.G. van Herk

25 maart 1961

Een uitbreiding van een integraal van Ingham

1961

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

door

Dr. C.G.G. van Herk

25 maart 1961

Een uitbreiding van een integraal van Ingham

$\doteq$ betekent: per definitie gelijk; het definiendum staat links.

Onderzocht wordt het gedrag van

(1) $\quad I \doteq I(T,x) \doteq I(T,x,a,b) \doteq \int_1^T x^{2\pi\tau i}\,\zeta(a+2\pi\tau i)\,\zeta(b-2\pi\tau i)\,d\tau$

voor $T \to \infty$; T,x,a,b zijn onafhankelijke parameters, $T>0$, $x>0$, $a=\alpha+\alpha' i$, $b=\beta+\beta' i$; ζ is de zetafunctie van Riemann. Dit probleem is voor $x=1$ opgelost door Ingham (P.L.M.S. 27 ('28), p.273-300). Behoudens kleine wijzigingen wordt diens notatie hier gevolgd. O.a. wordt gesteld

(2) $\quad c \doteq \gamma+\gamma' i \doteq a+b, \quad t \doteq 2\pi\tau, \; T \doteq 2\pi T, \quad \lambda(\sigma) \doteq$

$\doteq \max(0,\tfrac{1}{2}(1-\sigma),\tfrac{1}{2}-\sigma).$

Kortheidshalve wordt I gesplitst in een hoofdbestanddeeld F en een rest R, dus

(3) $\quad I(T,x,a,b) = F(T,x,a,b) + R(T,x,a,b),$

zodanig dat steeds

(4) $\quad R = O(T^{1-\frac{\gamma}{2}+\varepsilon}), \qquad \varepsilon>0;$

is tevens $F=O(T^{1-\frac{\gamma}{2}+\varepsilon})$, dan wordt $F=0$ gesteld; alleen voor dit laatste geval dus is R eenduidig vastgelegd.

Vóór Ingham was bekend

(5) $\quad I(T,1,\alpha,\beta) \sim \zeta(\gamma)T, \qquad \alpha>-\tfrac{1}{2},\; \beta>-\tfrac{1}{2},\; \gamma>1$

(Hadamard, Landau, Schnee),

en, vermoedelijk als enige geval van een integraal (1), waarbij beide argumenten van de zetafactoren op de kritieke lijn $\sigma=\frac{1}{2}$ liggen,

(6) $\quad I(T,1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \sim T\log T \qquad$ (Hardy-Littlewood 1918).

Ingham bewees veel meer dan (5), nl.

$$(7) \qquad I(T,1,a,b) = \int_1^T \left\{ \zeta(c) + \tau^{1-c}\,\zeta(2-c) \right\} d\tau + R(T,1,a,b),$$

waarbij hij voor R een scherpere schatting dan (4) verkreeg, nl.

$$(8) \qquad R = O(T^{\lambda(\alpha)+\lambda(\beta)} \log^2 T),$$

en zelfs, als er een $\delta > 0$ is zó dat ten minste één van de constanten α, β buiten de intervallen $(-\delta, \delta)$ en $(1-\delta, 1+\delta)$ ligt,

$$(8.1) \qquad R = O(T^{\lambda(\alpha)+\lambda(\beta)} \log T).$$

Met behulp van (7) kunnen verschillende integralen op de kritieke lijn worden geschat.

Het enige, aan spreker bekende resultaat over integralen (1), waarbij $x \neq 1$, is een lemma bij Titchmarsh, The theory of the Riemann Zeta-function ('51) p.207, nl.

$$(9) \qquad \int_T^{T+U} Z^2(t)\left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt = U(mn)^{-\frac{1}{2}}\left(\log \frac{T}{2\pi mn} + 2C + O(MT^{-\frac{1}{2}})\right)$$
$$+O(MU^2T^{-1}) + O(T^{\frac{9}{10}}) + O(T^{\frac{1}{2}}M^2 \log(MT)),$$

waarbij m en n geheel en >0, $(m,n) \doteq 1$, $M \doteq \max(m,n)$, $T^{\frac{1}{2}} < U \leq T$, verder C de constante van Euler is en

$$(10) \qquad \chi(s) \doteq \pi^{s-\frac{1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad Z(t) \doteq \left\{ \chi\left(\tfrac{1}{2}+it\right) \right\}^{-\frac{1}{2}} \zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right).$$

Om 3 redenen is er niet getracht een even scherpe restschatting te krijgen als Ingham: (a) is het verlies aan scherpte niet groot, als (8) door (4) wordt vervangen, (b) verlopen in dat geval verschillende schattingen eenvoudiger, (3) is er enige reden te veronderstellen dat (8) toch niet de juiste orde van de rest aangeeft, aangezien Titchmarsh in 1934 aantoonde dat voor het weliswaar zeer speciale geval (6) geldt

$$(6.1) \qquad I(T,1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = T \log T + (2C-1)T + O(T^{\frac{5}{12}} \log^2 T).$$

Het hoofdbestanddeel F is, evenals I, holomorf in een begrensd gebied van de (a,b)-ruimte. Door differentiatie volgt dus uit (1) en (3)

$$(11) \qquad \int_1^T x^{2\pi\tau i}\, \zeta^{(p)}(a+2\pi\tau i)\, \zeta^{(q)}(b-2\pi\tau i)\, d\tau$$
$$= \frac{\partial^{p+q} F}{\partial a^p \partial b^q} + \frac{\partial^{p+q} R}{\partial a^p\, \partial b^q}, \qquad p \geq 0,\ q \geq 0,$$

waarbij de laatste term in het rechterlid uitgedrukt kan worden door een integraal van Cauchy, genomen langs cirkels met a en b als middelpunten. Nu is R niet alleen begrensd in een passend eindig areaal van de (a,b)-ruimte, maar R kan, als functie van T, daar ook gelijkmatig in a en b worden geschat, waardoor het mogelijk wordt ook

$$\frac{\partial^{p+q}R}{\partial a^p \partial b^q}$$

asymptotisch te schatten in T; de gunstigste orde voor de stralen van de cirkels is daarbij $(\log T)^{-1}$. Door $a=b=\frac{1}{2}$ te stellen verkrijgt men asymptotische formules met een quadratische integrand in $\zeta(\frac{1}{2}\pm it)$.

Is het alleen om formules op de kritieke lijn te doen, dan is het voldoende a en b binnen een zekere omgeving van die lijn te kiezen, wat de schattingen enigszins vereenvoudigt (Ingham doet dit niet). Men kan b.v. stellen

(12) $$\frac{2}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{5}, \qquad \frac{2}{5} \leqslant \beta \leqslant \frac{3}{5}.$$

Het differentiëren naar a en b geeft "considerable formal simplifications in the proof". Spr., in dit opzicht door schade en schande wijzer geworden, kan deze woorden van Ingham slechts onderstrepen.

Ingham ging uit van de relatie

(13) $$\zeta(s) = \sum_{1}^{x} m^{-s} + \chi(s) \sum_{1}^{y} n^{s-1} + Q(x,y,s), \qquad x>0,\ y>0,$$

als

(14) $$Q(x,y,s) = \left(2i \cos \frac{\pi s}{2}\right)^{-1} \int_{C(x)} \frac{z^{-s} e^{2\pi[y]z}}{e^{-2\pi z}-1}\, dz.$$

Daarbij is $C(x)$ een contour die de negatieve halve as in positieve zin doorloopt, daarbij die (en alleen die) punten $\pm ni$ (n geheel >0) omsluitend waarvoor $n \leqslant x$. De betrekking (13) volgt uit de bekende integraal

$$\zeta(s) = \left(2i \cos \frac{\pi s}{2}\right)^{-1} \int_{C(0)} \frac{z^{-s}dz}{e^{-2\pi z}-1}$$

door verschuiven van de integratieweg.- Feitelijk is (13) de gedaante, waarin Ingham de approximatieve functionaalvergelijking van Hardy-Littlewood gebruikt. Deze laatste kan trouwens op eenvoudige wijze uit (13) worden afgeleid (Ingham, l.c. p.279); de restvoorstelling (14) is bij schattingen biezonder prettig.

Zij nu eerst x rationaal. Men kan stellen

(15) $$x \doteq g/h \qquad (g,h \text{ geheel } > 0), \quad (g,h) = 1,$$

en de berekening verloopt, op een kleinigheid na, precies als bij Ingham. Volgens (13) is

$$\zeta(a+2\pi\tau i) = \sum_{m=1}^{g\sqrt{\tau}} m^{-a-2\pi\tau i} + \chi(a+2\pi\tau i) \sum_{m=1}^{\sqrt{\tau}/g} m^{a-1+2\pi\tau i} +$$
$$+ Q(g\sqrt{\tau},\ \sqrt{\tau}/g,\ a+2\pi\tau i),$$

(16)
$$\zeta(b-2\pi\tau i) = \sum_{n=1}^{h\sqrt{\tau}} n^{-b+2\pi\tau i} + \chi(b-2\pi\tau i) \sum_{n=1}^{\sqrt{\tau}/h} n^{b-1-2\pi\tau i} +$$
$$+ Q(h\sqrt{\tau},\ \sqrt{\tau}/h, b-2\pi\tau i) .$$

Men kan hiervoor schrijven

(17)
$$\zeta(a+2\pi\tau i) = U_1+U_2+U_3, \quad \zeta(b-2\pi\tau i) = V_1+V_2+V_3,$$

zodat

(18)
$$I = \sum [1 \leq p,q \leq 3]\ I_{p,q}\ , \quad I_{p,q} \doteq \int_1^T x^{2\pi\tau i} U_p V_q d\tau \doteq \int_1^T \left(\frac{g}{a}\right)^{2\pi\tau i} U_p V_q d\tau\ ,$$

en deze formules blijven, met uitzondering van de laatste $\doteq$ -betrekking in (18), ook voor irrationale x geldig (waarbij dan g en h willekeurig geheel > 0 en relatief priem kunnen worden genomen).

Uit de approximatieve functionaalvergelijking van Hardy-Littlewood, -(13) kan ook, maar vereist enige discussie -, nl.

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \chi(s) \sum_{n \leq y} n^{s-1} + O(x^{-\sigma}) + O(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1}),$$
$$(s=\sigma+it,\ 2\pi xy = |t|)$$

volgt onmiddellijk

(19)
$$Q(g\sqrt{\tau},\ \sqrt{\tau}/g, a+2\pi\tau i) = O(\tau^{-\frac{\alpha}{2}}),\ Q(h\sqrt{\tau},\ \sqrt{\tau}/h, b-2\pi\tau i) = O(\tau^{-\frac{\beta}{2}}),$$

zodat

(20)
$$I_{3,3} = O(T^{1-\frac{\gamma}{2}})$$

wat volgens afspraak in de rest verdwijnt. Dit maakt het plausibel, zeg met de ongelijkheid van Schwarz voor ogen, dat ook de andere integralen $I_{p,q}$ die een factor U_3 of V_3 in de integrand bezitten, niet tot het hoofdbestanddeel zullen bijdragen. Dat deze integralen werkelijk in de rest verdwijnen vereist toch wel enige discussie, waarbij Ingham echter op de voet kan worden gevolgd. We zullen ons daarom tot I_{11} en I_{22} bepalen, zelfs een summiere discussie van I_{12} achterwege laten.

In de integrand van I_{22} treedt een factor $\chi(a+2\pi\tau i)\,\chi(b-2\pi\tau i)$ op; deze is niet hinderlijk. Immers, een asymptotische schatting van $\Gamma(s)$ op een verticale rechte (formule van Stirling) leidt wegens (10) tot

$$(20)\qquad \chi(\sigma+2\pi\tau i) = {}^{-\sigma+\frac{1}{2}}\exp\left\{2\pi i(-\tau\ \log\tau+\tau+\tfrac{1}{8})\right\} + O(\tau^{-\sigma-\frac{1}{2}})$$

wat tot

$$(21)\qquad \chi(a+2\pi\tau i)\,\chi(b-2\pi\tau i)\sim\tau^{1-\gamma}$$

voert; de fout hierbij gemaakt verdwijnt in de rest. Als men dit accepteert kan samenvattend worden geschreven:

$$I = \int_1^T \left(\frac{g}{h}\right)^{2\pi\tau i}\left\{\sum_{m=1}^{g\sqrt{\tau}}\ \sum_{n=1}^{h\sqrt{\tau}} m^{-a-2\pi\tau i}n^{-b+2\pi\tau i} + \tau^{1-\gamma}\sum_{m=1}^{\sqrt{\tau}/g}\ \sum_{n=1}^{\sqrt{\tau}/h} m^{a-1+2\pi\tau i}n^{b-1-2\pi\tau i}\right\}d\tau + O(T^{\frac{\gamma}{2}+\varepsilon}) + O(T^{1-\frac{\gamma}{2}+\varepsilon}).$$

Deze uitdrukking bevat termen $\sim AT$ (A constant); die uit de eerste dubbelsom beantwoorden aan paren (m,n),- die we van nu af als roosterpunten in een n-m-vlak zullen interpreteren, met de n-as horizontaal -, waardoor m=gr, n=hr; deze liggen op een rechte door de oorsprong met richtingscoëfficiënt g/h; daarnaast leveren in de tweede dubbelsom de roosterpunten m=hr, n=gr, op de rechte met richtingscoëfficiënt h/g eveneens een bijdrage tot het hoofdbestanddeel. De bijdrage van alle andere roosterpunten verdwijnt in de rest. In het geval x=1 van Ingham vallen beide rechten samen wegens h/g = =g/h = 1.

Dit uitwerkend komt men tot het resultaat

$$(23)\qquad I = g^{-a}h^{-b}J+R,\quad J \doteq \int_1^T\left\{\sum_{r=1}^{\sqrt{\tau}} r^{-c} + \left(\frac{\tau}{gh}\right)^{1-c}\sum_{r=1}^{\sqrt{\tau}/gh} r^{c-2}\right\}d\tau$$

wegens

$$(24)\qquad \sum_{n=1}^{x} n^{-s} = \zeta(s) + \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma})$$

levert dit ten slotte

$$(25)\qquad I = g^{1-a}h^{1-b}\int_K^{T/gh}\left\{\zeta(c)+v^{1-c}\zeta(2-c)\right\}dv + O(T^{1-\frac{\gamma}{2}+\varepsilon}) + O(T^{\frac{\gamma}{2}+\varepsilon}),$$

waarbij K een zekere positieve constante is. Dit resultaat is het enige werkelijk interessante aan de berekening: het hoofdbestanddeel is discontinu voor alle rationale waarden van x. Een benadering van een irrationale x door breuken g/h leidt tot het vermoeden dat dan $F(T,x,a,b)=0$ zal zijn. Dit is niet voor alle irrationale x juist, maar wel voor bijna alle.

De moeilijkheid wordt hierbij geleverd door die roosterpunten (m,n), waarvoor $\left|\frac{m}{n}-x\right|$ zeer klein is. Met behulp van een stelling van Behnke resp. Walfisz:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\{nx\}} = O(N\log^{1+\varepsilon}N), \qquad \text{voor bijna alle } x, \tag{26}$$

lukt het aan te tonen dat bijna altijd $F=0$ (vgl. Koksma, Diophantische Approximationen '36, p.109).