STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1964-005

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

A.B. Paalman-de Miranda

21 maart 1964

Volledig enkelvoudige halfgroepen met een nulelement

1964

ZW 1964-005

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

door

A.B. Paalman-de Miranda

21 maart 1964

Volledig enkelvoudige halfgroepen met een nulelement

Een halfgroep S met nulelement 0 heet enkelvoudig als
1°) $S^2 \neq 0$ en
2°) voor ieder ideaal I van S geldt I=0 of I=S.
Een links ideaal L van S heet minimaal als $L \neq 0$ en (0) het enige links ideaal van S is bevat in I.
Zij nu E de verzameling van idempotenten van S. In E kunnen wij een partiële ordening invoeren door te definieren $e \leq f$ dan en slechts dan als ef=fe=e.
Een idempotent f van S heet primitief als $f \neq 0$ en uit $e \leq f$ volgt e=0 of e=f.

Definitie: Een volledig enkelvoudige halfgroep met een nulelement is een enkelvoudige halfgroep met een nulelement die een primitief idempotent bevat.

Men kan nu bewijzen dat in een dergelijke halfgroep S ieder idempotent $\neq 0$ primitief is; dat, als $e=e^2$, Se en eS respectievelijk minimale links en rechts idealen zijn, en dat S de vereniging is

van z'n minimale links (rechts) idealen. Daar voor alle $a \in S$, SaS een ideaal is van S, geldt $SaS=0$ of $SaS=S$.
Zij nu A de verzameling $\{a \mid a \in S, SaS=0\}$. Dan is A een ideaal en dus $A=S$ of $A=0$.
Als $A=S$, dan is $S^3=0$ en dus $S^2=0$, een tegenspraak.
Dus $A=0$ en $SaS=S$ voor alle $a \neq 0$, $a \in S$.

Stel nu dat $\{R'_\alpha; \alpha \in A\}$ en $\{L'_\beta\ ; \beta \in B\}$ respectievelijk de minimale rechts en links idealen van S zijn en stel

$$R_\alpha = R'_\alpha \setminus 0 \quad \text{en} \quad L_\beta = L'_\beta \setminus 0. \qquad H_{\alpha\beta} = R_\alpha \cap L_\beta.$$

<u>Stelling:</u> Zij S een volledig enkelvoudige halfgroep met een nulelement en stel dat $L_\beta R_\alpha \neq 0$. Dan is $H_{\alpha\beta} = R_\alpha \cap L_\beta = R_\alpha L_\beta$ een groep.
Als $L_\beta R_\alpha = 0$, dan is $H^2_{\alpha\beta}=0$ en in beide gevallen geldt dat $H_{\alpha\beta} \neq 0$.
<u>Bewijs:</u> Stel $L_\beta R_\alpha \neq 0$. Dan is $L'_\beta R'_\alpha \neq 0$ en een ideaal van S, dus $L'_\beta R'_\alpha = S$ en daar $S=S^2=L'_\beta R'_\alpha L'_\beta R'_\alpha$ is ook $R'_\alpha L'_\beta \neq 0$. Stel nu $a \neq 0$, $a \in R_\alpha L_\beta$; dan $a \in L_\beta$, $a \in R_\alpha$ en dus $Sa = L'_\beta$ en $aR'_\alpha = 0$ of $aR'_\alpha = R'_\alpha$.
Daar $S = L'_\beta R'_\alpha = SaR'_\alpha$ is $aR'_\alpha = R'_\alpha$. Hieruit volgt dat $R_\alpha L_\beta \subset aR_\alpha L_\beta$ en evenzo dat $R_\alpha L_\beta \subset R_\alpha L_\beta a$, dus $R_\alpha L_\beta$ is een groep.
Zij e de eenheid van $R_\alpha L_\beta$, dan is $R_\alpha = eS \setminus 0$ en $L_\beta = Se \setminus 0$.
Dus $R_\alpha \cap L_\beta = eS \cap Se \setminus 0 = eSe \setminus 0 = R_\alpha L_\beta$.
Als $L_\beta R_\alpha = 0$, dan $H^2_{\alpha\beta} \subset L_\beta\ R_\alpha = 0$.

Stel nu $b \in L_\beta$ en $a \in R_\alpha$, dan $S=S^2=SaSSbS$, en dus $aSSb \neq 0$.
Daar $aSSb \subset R'_\alpha \cap L'_\beta$ geldt $R_\alpha \cap L_\beta = H_{\alpha\beta} \neq 0$.
Zij nu G een willekeurige groep en $G^0 = G \cup 0$ de groep met 0 die wij uit G verkrijgen door een nulelement te adjungeren. Laat nu A en B 2 willekeurige verzamelingen zijn. Onder een $A \times B$ matrix over G^0 verstaan we een afbeelding M van $A \times B$ in G^0 en we schrijven $M=(g_{\alpha\beta})$, waarbij $g_{\alpha\beta}$ het beeld is van $(\alpha,\beta) \in A \times B$.
We definieeren nu $\sum_\beta g_{\alpha\beta} = 0$ als $g_{\alpha\beta}=0$ voor alle β en

$$\sum_\beta g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta^*} \text{ als } g_{\alpha\beta}=0 \text{ voor alle } \beta \neq \beta^*.$$

Zij nu M_1 een $A \times B$ en M_2 een $B \times C$ matrix. Als voor ieder paar (α,γ)

de som $\sum_{\beta} g_{\alpha\beta} g'_{\beta\gamma} = g^{*}_{\alpha\gamma}$ gedefinieerd dan definieren wij het matrixproduct M_1, M_2 als de matrix $M_3 = (g^{*}_{\alpha\gamma})$.
Onder een Rees - $A \times B$ matrix over G^{o} verstaan wij een $A \times B$ matrix, die hoogstens één element $g_{\alpha\beta}$ bevat met $g_{\alpha\beta} \neq 0$. Zij nu M de verzameling van alle Rees - $A \times B$ matrices en P een willekeurige $B \times A$ matrix.
In M definieren we een vermenigvuldiging o op de volgende wijze:
$M_1 \circ M_2 = M_1 P M_2$.
M wordt dan een halfgroep: de Rees - $A \times B$ matrix halfgroep over G^{o} met "sandwich matrix" P.
Notatie: $M^{o}(G,A,B,P)$.
Men kan nu bewijzen dat $M^{o}(G,A,B,P)$ volledig enkelvoudig is met een nulelement dan en slechts dan als iedere rij en iedere kolom van P een element ongelijk 0 bevatten.
Een dergelijke halfgroep heet een reguliere Rees halfgroep. Zij nu omgekeerd S een volledig enkelvoudige halfgroep met een nulelement en $\{R'_{\alpha}; \alpha \in A\}$ en $\{L'_{\beta}; \beta \in B\}$ de minimale links en rechts idealen van S.
Uit stelling 1 volgt dat er een α_o en β_o zijn met $H_{\alpha_o\beta_o}$ een groep.
Kies nu bij iedere α en β een vast element $r_{\beta} \in H_{\alpha_o\beta}$ en $q_{\alpha} \in H_{\alpha\beta_o}$.
Definieer nu de $B \times A$ matrix $P = (p_{\beta\alpha})$ over $H^{o}_{\alpha_o\beta_o}$ als volgt $p_{\beta\alpha} = r_{\beta} q_{\alpha}$.
Daar $r_{\beta} q_{\alpha} \in R_{\alpha_o} L_{\beta_o} \subset R'_{\alpha_o} \cap L'_{\beta_o} = H_{\alpha_o\beta_o} \cup 0$ is P inderdaad een $B \times A$ matrix over $H^{o}_{\alpha_o\beta_o}$.
Uit stelling 1 volgt dat $r_{\beta} q_{\alpha} \neq 0$, dan en slechts dan als $H_{\alpha\beta}$ een groep is. Daar er voor iedere β een α is met $H_{\alpha\beta}$ een groep geldt dat P in iedere rij en evenzo in iedere kolom een element ongelijk aan 0 bevat, en dus is $M^{o}(H_{\alpha_o\beta_o}, A,B,P)$ een volledig enkelvoudige halfgroep met een nulelement.
Verder geldt ook dat $M^{o}(H_{\alpha_o\beta_o}, A,B,P)$ isomorf is met S.

Stelling 2 (Rees)

Een halfgroep is volledig enkelvoudig met een nulelement dan en slechts dan als het isomorf is met een reguliere Rees-matrix halfgroep over een groep met 0. zie [1] .

De stelling van Rees hangt samen met de stelling van Wedderburn voor enkelvoudige ringen A. Zij e het eenheidselement van A, dan is $e=e_1+\dots+e_n$ waarbij de e_i primitieve paarsgewijs orthogonale idempotenten zijn. Verder is A de directe som van de ringen $A_{ij}=e_iAe_j$, waarbij de A_{ii} isomorfe lichamen zijn.

Zij S de vereniging van de A_{ij} ; dan is S een halfgroep onder de vermenigvuldiging gedefinieerd in A en S is zelfs een volledig enkelvoudige halfgroep met 0. De representatie van A als de volledige matrix algebra over K ($K\simeq A_{ii}$) induceert de Rees representatie van S als we K beschouwen als een groep met 0.

De "sandwich" matrix P is hier de eenheidsmatrix.

Stel nu dat S ook een topologische structuur heeft en dat S een compacte volledig enkelvoudige halfgroep met 0 is.

Uit de continuiteit van de vermenigvuldiging volgt dan onmiddellijk dat de 0 een geisoleerd punt is van S.

Verder zijn de verzamelingen

$$H=\bigcup\{H_{\alpha\beta} \mid H_{\alpha\beta} \text{ een groep}; \alpha\in A,\beta\in B\} \text{ en}$$
$$H'=\bigcup\{H_{\alpha\beta} \mid H^2_{\alpha\beta}=0;\alpha\in A,\beta\in B\} \quad \text{open en gesloten}$$

deelverzamelingen van S.

Zij nu $e_{\alpha\beta}$ de eenheid van de groep $H_{\alpha\beta}$ en E de verzameling idempotenten van S.

Stel $\rho_{\alpha\beta}$ de afbeelding van S in L_β met $\rho_{\alpha\beta}(x)=xe_{\alpha\beta}$.

Uit de compactheid van L_β en de continuiteit van $\rho_{\alpha\beta}$ volgt dat

$$C_\beta=\bigcap\{\rho^{-1}_{\alpha\beta}(L_\beta) \mid H_{\alpha\beta}\in H,\alpha\in A\}$$
en
$$D_\beta=\bigcap\{\rho^{-1}_{\alpha\gamma}(0) \mid H^2_{\alpha\beta}=0,\alpha\in A,\gamma\in B\}$$

twee open en gesloten verzamelingen zijn en dat

$$C_\beta=\bigcup\{L_\gamma \mid \gamma\in B,\ H_{\alpha\gamma}\in H \text{ als } H_{\alpha\beta}\in H \text{ voor alle } \alpha\in A\} \text{ en}$$
$$D_\beta=\bigcup\{L_\gamma \mid \gamma\in B,\ H_{\alpha\gamma}\subset H' \text{ als } H_{\alpha\beta}\subset H' \text{ voor alle } \alpha\in A\}.$$

Dus $\mathcal{L}_\beta = C_\beta \cap D_\beta = \bigcup\{L_\gamma | \gamma \in B,\ H_{\alpha\gamma}$ en $H_{\alpha\beta}$ beide in H of beide in H' voor alle $\alpha \in A\}$ is een open en gesloten verzameling van S.

Daar de $\mathcal{L}_\beta$ disjunct zijn is $S \setminus 0$ dus te schrijven als vereniging van eindig veel $\mathcal{L}_\beta$.

We kunnen hetzelfde doen voor rechts idealen en bewijzen dat $S \setminus 0$ de vereniging is van eindig veel disjuncte open en gesloten verzamelingen R_β.

$S \setminus 0$ is dus de vereniging van verzamelingen $\mathcal{L}_{\alpha_i} \cap R_{\beta\gamma}$, waarbij iedere $\mathcal{L}_{\alpha_i} \cap R_{\beta_\gamma}$ bevat is in H of H' $i=1,2,\ldots,n$, $\gamma=1,\ldots,m$

Met behulp van deze splitsing is het mogelijk in L_{β_1} en R_{α_1} een gesloten deelverzameling Y_1 respectievelijk Y_2 te vinden, zo dat Y_1 precies één punt gemeen heeft met iedere verzameling $H_{\alpha\beta_1}$ en Y_2 precies één punt gemeen heeft met de $H_{\alpha_1\beta}$.

We kiezen nu de α_1 en β_1 zó dat $H_{\alpha_1\beta_1}$ een groep is. Zij nu $H^O_{\alpha_1\beta_1}$ de groep met 0 die wij uit $H_{\alpha_1\beta_1}$ verkrijgen door adjunctie van een 0 element en zij $(Y_1, H^O_{\alpha_1\beta_1}, Y_2)$ de ruimte $Y_1 \times H_{\alpha_1\beta_1} \times Y_2 \cup \{0\}$ waarin een vermenigvuldiging gedefinieerd is op de volgende manier

$(y_1,h,y_2)(y_1',h',y_2')=(y_1,hy_2y_1'h_1',y_2')$ en $s.0 = 0.s= 0$.

Dan is $(Y_1,H^O_{\alpha_1\beta_1},Y_2)$ topologisch isomorf met S. Het omgekeerde is eenvoudig aan te tonen.

Zij H een compacte topologische groep en zij $H^O=H \cup \{0\}$ de groep met 0 die uit H ontstaat door adjunctie van een nulelement.

Laat Y_1 en Y_2 twee compacte ruimten zijn en ϕ een continue afbeelding van $Y_2 \times Y_1$ in H^O met

$\phi(y_2,Y_1) \cap H \neq \emptyset$ en $\phi(Y_2,y_1) \cap H \neq \emptyset$ voor alle $y_2 \in Y_2, y_1 \in Y_1$.

Zij (Y_1,H^O,Y_2) de ruimte $Y_1 \times H \times Y_2 \cup \{0\}$ met een vermenigvuldiging gedefinieerd door

$$(y_1,h,y_2)(y_1^*,h^*,y_2^*)=(y_1,h\phi(y_2,y_1^*)h^*,y_2^*) \text{ en } s\,.\,0 = 0.s = 0.$$

Dan is (Y_1, H^o, Y_2) een compacte volledige enkelvoudige halfgroep met een nulelement.

Stelling

Een compacte halfgroep S met nulelement is dan en slechts dan volledig enkelvoudig als S topologisch isomorf is met een (Y_1, H^o, Y_2).

D. Rees: On Semi-groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. 36 1940.

A. Clifford and G. Preston: The algebraic theory of Semigroups.

typ: HvD.