STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1966-005

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr. J.J. Seidel

27 april 1966

Polytopen

1. Regelmatige polytopen.

R_r is de euklidische ruimte voor dimensie r en S_r is de sferische ruimte van dimensie r.

De enige convexe regelmatige veelvlakken in R_3 zijn de vijf Platonische lichamen: het regelmatig viervlak α_3, de octaëder β_3, de kubus γ_3, de dodecaëder en de icosaëder.

De enige convexe regelmatige polytopen in R_r, $r \geq 5$, zijn het regelmatig simplex α_r, de kruispolytoop β_r, de maatpolytoop γ_r. Zie [2] en [3].

De 2^r punten $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$ in R_r zijn de hoekpunten van een γ_r.
De 2r punten $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$ etc. in R_r zijn de hoekpunten van een β_r.
De r+1 punten $(1, 0, \ldots, 0, 0)$ etc. in R_{r+1} zijn de hoekpunten van een

α_r die is gelegen in de R_r met vergelijking $\sum_{i=1}^{r+1} x_i = 1$.

2. Hadamardmatrices.

Kan men uit de hoekpunten van een kubus er vier kiezen, die de hoekpunten zijn van een regelmatig viervlak? Dat kan inderdaad, immers neem

$$\begin{array}{c} (1, 1, 1) \\ (1, -1, -1) \\ (-1, 1, -1) \\ (-1, -1, 1) \end{array} \text{. De matrix } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

bevat slechts de getallen 1 en -1 en is orthogonaal. Zo'n matrix heet een Hadamardmatrix.

Kan men uit de 2^{r-1} hoekpunten van een γ_{r-1} er r kiezen, die de hoekpunten zijn van α_{r-1}? Bestaan er Hadamardmatrices van orde r, dwz. bestaan er vierkante matrices van orde r, met als elementen louter 1 en -1, die orthogonaal zijn? Nee, voor $r=3$, $r \neq 4k$, k natuurlijk. Ja, voor $r=1$, $r=2$, $r=4k$, $(1 \leq k \leq 28)$. Voor $k \geq 29$ zijn er vele vraagtekens. Zie [6].

3. Isozonohedra.

Zijn er in R_3 veelvlakken waarvan alle zijvlakken onderling congruente ruiten zijn? Zie [1].
Zijn er in R_3 stelsels rechten zodat elk tweetal rechten dezelfde hoek maakt? Aan de laatste vraag wordt voldaan door de vier diagonalen van een kubus, met hoek arccos 1/3; eveneens door de zes antipodenverbinders van een icosaëder, met hoek arccos $1/\sqrt{5}$.

4. Gelijkhoekige stelsels rechten in R_r.

Welke gelijkhoekige stelsels van n rechten bevat R_r? Bij gegeven r, wat is het maximum n(r) van n?

Een stelsel van n rechten, gedragen door de, R_r opspannende, eenheidsvectoren $a_1, \ldots, a_n$, is gelijkhoekig als voor elk paar rechten

$$\cos\phi = \pm (a_i, a_j) \qquad 0 \leq \phi \leq \tfrac{1}{2}\pi$$

dezelfde waarde heeft. De symmetrische matrix A der inwendige producten heeft orde n en is semidefiniet met rang r, dus heeft kleinste eigenwaarde 0 met multipliciteit n-r. De matrix

$$B = \frac{1}{\cos\phi}(A - I)$$

heeft kleinste eigenwaarde $-1/\cos\phi$ met multipliciteit n-r. De matrix B is een (0, 1, -1)-matrix, d.w.z. heeft elementen

$$b_{ii} = 0,\ b_{ij} = b_{ji} = \pm 1.$$

5. Klassen van (0, 1, -1)-matrices.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right); \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenwaarden:

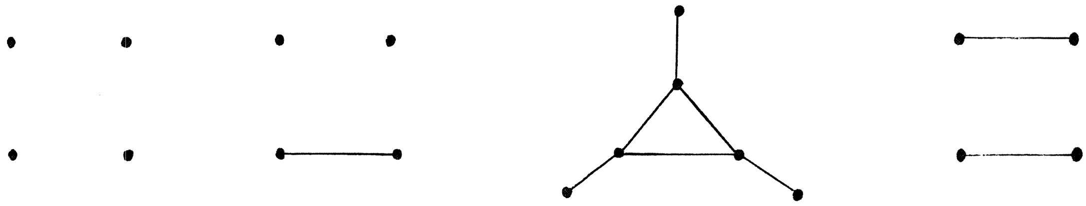
$-1, -1, -1, 3$	$-\sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}$	$-3, 1, 1, 1$
	$-\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$	
$\phi = 0$	$\phi = \arccos 1/\sqrt{5}$	$\phi = \arccos 1/3$.

Gelijkhoekige stelsels rechten worden gekarakteriseerd door de klassen van zulke (0, 1, -1)-matrices onder de equivalentie die wordt voortgebracht door de volgende operaties:

vermenigvuldiging met -1 van een rij en van de corresponderende kolom, verwisseling van twee rijen en van de corresponderende kolommen.

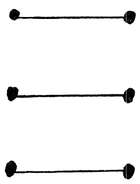
6. Grafen.

Bij elke (0, 1, -1)-matrix B behoort een graaf van orde n: verbindt punten i en j dan en slechts dan als $b_{ij}=-1$. Bij de voorbeelden van 5. behoren de grafen:



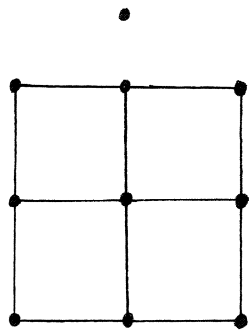
De volgende grafen, met de bijbehorende eigenwaarden, dragen bij tot de oplossing van het in 4. gestelde probleem voor r=4, 5, 6, 7.

(6.1)

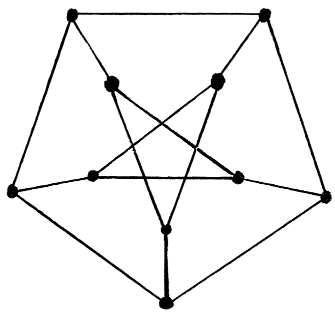


-3 (2×)
1 (3×)
3 (1×)

(6.2)

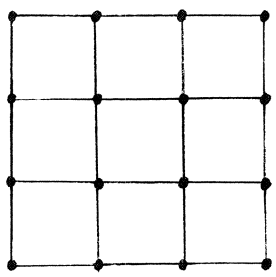


(6.3)



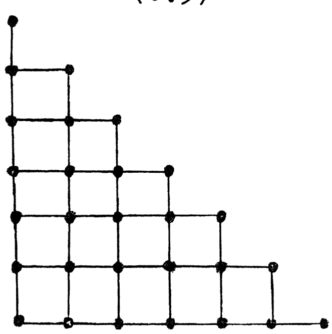
3 (5×) en -3 (5×)

(6.4)



3 (10×)
-5 (6×)

(6.5)



3 (21×)
-9 (7×)

7. Stel de bol S_{r-1} met straal 1 bevat n punten met slechts twee verschillende afstanden α en β. Als $\cos\alpha + \cos\beta < 0$ dan is S_{r-1} inbedbaar in een S_r met straal R zodat $1 - \cos\alpha = R^2(1 - \cos\phi)$, $1 - \cos\beta = R^2(1 + \cos\phi)$, $R > 1$, $0 < \phi < \pi$. De n rechten, die het middelpunt van S_r verbinden met de n punten, vormen een gelijkhoekig stelsel in R_{r+1}. Als bovendien $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\alpha\cos\beta$ dan zijn er n+1 gelijkhoekige rechten in R_{r+1}.

8. Zes gelijkhoekige rechten in R_4.

De middens van de zes ribben van een regelmatig viervlak α_3 in R_3 zijn de hoekpunten van een regelmatig octaëder β_3. Zij liggen op een S_2 met sferische afstanden $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ en $\beta = \pi$. Liften op een S_3 geeft zes gelijkhoekige rechten in R_4 met hoek arccos 1/3. De bijbehorende graaf is (6.1).

9. Tien gelijkhoekige rechten in R_5.

S_3 is gevezeld over een basis S_2 met vezels S_1. De vezels die uitgaan van een kleine cirkel op S_2 vormen een torus. Neem de straal van de kleine cirkel $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dan zijn de stralen van de torus gelijk en kunnen op de torus negen punten worden gekozen met sferische afstanden $\alpha = \arccos\frac{1}{4}$, $\beta = \arccos(-\frac{1}{2})$. Liften op een S_4 geeft tien gelijkhoekige rechten in R_5 met hoek arccos 1/3. Deze rechten zijn ook te verkrijgen door liften van de middens van de tien ribben van een α_4. De respectievelijke grafen zijn de tot dezelfde klasse behorende grafen (6.2) en (6.3).

10. Zestien gelijkhoekige rechten in R_6.

Beschouw onder de 64 hoekpunten van een γ_6 de 32 die een even aantal negatieve coördinaten hebben. De verbindingsrechten van de paren der diametrale punten vormen een gelijkhoekig stelsel van 16 rechten met hoek arccos 1/3. Hun graaf is het complement van (6.4).

11. Achtentwintig gelijkhoekige rechten in R_7.

De eindpunten van de 8 rijvectoren van de Hadamardmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

liggen alle in het hypervlak $x_1=1$ en vormen daarin een α_7.
De verbindingsrechten van (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) met de 28 middens van de ribben van deze α_7 vormen een gelijkhoekig stelsel in R_7 met hoek arccos 1/3. Hun graaf is het complement van (6.5).

12. Stelling: $n(3) = n(4) = 6$, $n(5) = 10$, $n(6) = 16$, $n(7) \geq 28$.
In het bewijs, zie [4] en [5], komt voor het volgende
Lemma. Zij B een (0, 1, -1)-matrix van orde n met kleinste eigenwaarde λ_0 van multipliciteit n-r en met andere eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Dan geldt

$$\lambda_0 \geq -\frac{(n-1)r}{n-r} \text{ met gelijkteken iff } \lambda_1 = \ldots = \lambda_r.$$

13. De probleemstelling komt voort uit de elliptische meetkunde. Er is verband met problemen uit de eindige meetkunde, uit de conferentietelefonie en uit de statistiek.

Literatuur

[1] Bilinski, S., Über die Rhombenisoeder, Glasnik Mat. Fiz. Astr. 15, 251-262 (1960).

[2] Coxeter, H.S.M., Regular polytopes, second ed., New York (1963), Macmillan.

[3] Fejes Tóth, L., Reguläre Figuren, Budapest (1965), Akadémiai Kiado.

[4] Haantjes, J., Equilateral point-sets in elliptic two- and three-dimensional spaces, Nieuw Arch. Wisk. 22, 355-362 (1948).

[5] van Lint, J.H. en J.J. Seidel, Equilateral point-sets in elliptic geometry, Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amst. Proc. A, 69 (1966).

[6] Ryser, H.J., Combinatorial mathematics, Carus monograph No. 14, (1963), Math. Assoc. of America.