STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1952 - 006

Voordracht in de serie Actualiteiten

J. Berghuis

29 maart 1952

GEBROKEN MACHTREEKSEN

1952

Voordracht door J. Berghuis in de serie
Actualiteiten op 29 Maart 1952.

GEBROKEN MACHTREEKSEN

1. Inleiding.

Er is reeds meermalen gewerkt aan theorema's over gebroken machtreeksen, d.w.z. die polynomen, welke men verkrijgt door een volledige reeksontwikkeling voor een of andere functie na een bepaalde term af te breken.

Zo kent men in de eerste plaats het werk van O. Blumenthal[1], die de gebroken reeksen van de functie $(1+x)^{\gamma}$ beschouwt in zijn artikel getiteld: "La geometrie des polynomes binomiaux".

Er zijn verder de verschillende asymptotische beschouwingen over reeksen van het exponentiele type, waarvan de eerste te danken was aan een vermoeden van Ramanujan. (2,3,4,5,6)

Dan zijn er nog een aantal artikelen, welke gedeelten van machtreeksen behandelen, die in een zekere omgeving begrensd blijven, o.a. van de hand van W. Rogosinski en G. Szegö.(7)

Het ligt in de bedoeling thans soortgelijke beschouwingen te houden als Blumenthal, echter niet meer voor de binomiale polynomen, maar voor die polynomen, welke ontstaan door het afbreken van de reeksen van het exponentiele type. Daarbij zal men iets nodig hebben van de asymptotische beschouwingen, welke vermeld zijn in de referenties (2) tot en met (6), maar de derde soort artikelen zal men hierbij niet behoeven.

De lijst van aangehaalde schrijvers is niet volledig, terwijl het in het volgende behandelde vrij elementair blijft.

2. Definities.

Vooraf de invoering van de volgende symbolen, waarbij n een natuurlijk getal is

$$E_n(x)= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \;, \tag{2,1}$$

$$C_{2n}(x)= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{2,2}$$

en

$$S_{2n+1}(x)= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{2,3}$$

en welbekend zijn de relaties

$$\lim_{n\to\infty}\begin{cases} E_n(x) &= \exp x, \\ C_{2n}(x) &= \cos x, \\ S_{2n+1}(x) &= \sin x. \end{cases} \tag{2,4}$$

3. Enkele eigenschappen van $E_n(x)$.

Om te beginnen neme men (2,1) nader onder de loupe. Er zijn twee typen polynomen nu en wel worden deze typen het duidelijkst gekarakteriseerd door hun gedrag voor negatieve x.

Gebruikmakende van de resttermvoorstelling van Lagrange, vindt men gemakkelijk

$$\exp x - E_n(x) = \int_0^x \exp u \,\frac{(x-u)^n}{n!}\,du. \tag{3,1}$$

Voor $x > 0$ geldt dus zonder uitzondering

$$\exp x > E_n(x), \tag{3,2}$$

waarbij voor elke n een x zodanig te kiezen is, dat het verschil tussen beide functies elke positieve waarde overschrijdt en bij vaste x is n zodanig te kiezen, dat het verschil tussen beide functies willekeurig klein wordt.

Zeker geldt voor $x > 0$ en $n > m$

$$E_n(x) > E_m(x), \tag{3,3}$$

daar $E_n(x)$ meer termen (welke alle positief zijn) bevat dan $E_m(x)$. De integraal in (3,1) is dus een monotoon dalende functie van n.

Voor $x = 0$ is $E_n(0) = 1$ voor elke n.

Voor $x < 0$ stelle men $x = -y$:

$$\exp(-y) - E_n(-y) = (-1)^{n+1} \int_0^y \exp(-u)\,\frac{(y-u)^n}{n!}\,du. \tag{3,4}$$

$$\begin{aligned} &\text{Is nu } n \text{ even dan } E_n(-y) > \exp(-y), \\ &\text{Is nu } n \text{ oneven dan } E_n(-y) < \exp(-y), \end{aligned} \tag{3,5}$$

en weer is het verschil tussen beide functies bij vaste n willekeurig groot te krijgen, terwijl bij vaste y het verschil willekeurig klein te maken is.

De functies met een even index n kunnen dus geen reëel nulpunt hebben. In het volgende zal met nulpunt altijd een reëel nulpunt bedoeld worden.

Wegens $\frac{d\,E_n(x)}{dx} = E_{n-1}(x)$ (3,6)

geldt dan,dat de functies met oneven index n monotoon stijgend moeten zijn en dus hebben deze functies een en slechts een nulpunt.[8]

Een veelterm uit de even klasse heeft dus een minimum op de plaats, waar zijn voorganger uit de oneven klasse een nulpunt heeft en een buigpunt bezitten deze krommen niet.

De oneven klasse bezit wel een nulpunt en een buigpunt, maar geen maximum of minimum.

De plaats van de nulpunten zal nader worden aangegeven in de paragraaf 5.

Gemakkelijk ziet men in

$$E_n(-n) - E_{n-2}(n) = 0 \qquad (3,7)$$

d.w.z. $E_n(x)$ en $E_{n-2}(x)$ snijden elkaar in de punten $x = 0$ en $x = -n$.

Voorlopig beschouwe men nu polynomen uit de even klasse. De hieronder af te leiden eigenschappen kunnen eenvoudig worden overgedragen op de polynomen van de oneven klasse.

$E_{2n}(x)$ en $E_{2n-2}(x)$ snijden elkaar dus in de punten $x = 0$ en $x = 2n$, in het interval $-2n < x < 0$ is $E_{2n}(x)$ kleiner dan $E_{2n-2}(x)$, daarbuiten groter.

$E_{2n-2}(x)$ en $E_{2n-4}(x)$ snijden elkaar in de punten $x = 0$ en $x = -(2n-2)$, in het interval $-(2n-2) < x < 0$ is $E_{2n-2}(x)$ kleiner dan $E_{2n-4}(x)$, daarbuiten groter.

Binnen het interval $-(2n-2) < x < 0$ is dus $E_{2n-4}(x)$ groter dan $E_{2n}(x)$, voor $x > 0$ is $E_{2n}(x)$ groter dan $E_{2n-4}(x)$ en voor $x < -2n$ is $E_{2n}(x)$ groter dan $E_{2n-4}(x)$.

Behalve in $x = 0$, hebben dus $E_{2n-4}(x)$ en $E_{2n}(x)$ slechts snijpunten in het interval $-2n < x < -(2n-2)$. Een is er zeker en maximaal zijn er drie. Veronderstel nu eens, dat het laatste waar is. Dan volgt uit het theorema van Rolle, dat ook $E_{2n-1}(x)$ en $E_{2n-5}(x)$ drie snijpunten moeten hebben in het interval $-(2n-1) < x < -(2n-5)$. Zo doorgaande met Rolle komt men tot de conclusie, dat $E_4(x)$ en $E_0(x) = 1$ 4 snijpunten moesten hebben, en dit is zeker niet waar, aangezien $E_4(x)$ slechts 1 minimum heeft. $E_{2n-4}(x)$ en $E_{2n}(x)$ hebben dus 2 snijpunten. Op analoge wijze ziet men dat $E_{2n}(x)$ en $E_{2m}(x)$ met $m \neq n$ slechts 2 snijpunten hebben en dat voor n naar oneindig de abscis van het ene snijpunt naar $-\infty$ gaat, het andere is steeds $x = 0$.

4. Enkele eigenschappen van $C_{2n}(x)$ en $S_{2n+1}(x)$.

Zonder beperking kan men nu uitsluitend $x > 0$ beschouwen, zulks in verband met het even/oneven karakter der polynomen.

Evenals in paragraaf 3 krijgt men:

$$\cos x - C_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \sin y \, \frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!} \, dy \tag{4,1}$$

en

$$\sin x - S_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \sin y \, \frac{(x-y)^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{4,2}$$

Voor even n geldt dus

$$\left.\begin{matrix} C_{2n}(x) \\ S_{2n+1}(x) \end{matrix}\right\} \text{ groter dan } \left\{\begin{matrix} \cos x. \\ \sin x. \end{matrix}\right.$$

Voor oneven n:

$$\left.\begin{matrix} C_{2n}(x) \\ S_{2n+1}(x) \end{matrix}\right\} \text{ kleiner dan } \left\{\begin{matrix} \cos x. \\ \sin x. \end{matrix}\right.$$

Verder heeft men nu:

$$\frac{d}{dx} \, C_{2n}(x) = S_{2n-1}(x) \tag{4,3}$$

en

$$\frac{d}{dx} \, S_{2n+1}(x) = - C_{2n}(x) \; . \tag{4,3}$$

$C_{2n}(x)$ heeft dus extrema in de nulpunten van $S_{2n-1}(x)$ en buigpunten in de nulpunten van $C_{2n-2}(x)$.

De vraag, hoeveel nulpunten heeft $C_{2n}(x)$ resp. $S_{2n+1}(x)$, zal later aan de orde komen.

De doorsnijdingen van de krommen $C_{2n}(x)$ en $C_{2n-4}(x)$ is gemakkelijk te berekenen n.l. $x = 0$ en $x = \pm \; 2n(2n-1)$. Voor $x > 0$ hebben dus $C_{2n}(x)$ en $C_{2n-4}(x)$ slechts 1 doorsnijdingspunt. Op analoge wijze als voor de polynomen $E_n(x)$, kan men nu bewijzen, dat $C_{2n}(x)$ elke $C_{2m}(x)$ slechts voor $x > 0$ snijdt in een punt en wel indien n en m twee verschillen.

De limiet voor n naar ∞ van dit snijpunt is ook weer oneindig. De extremale waarden van $C_{2n}(x)$ liggen van even n bij waarden van x, welke kleiner zijn dan $k\pi$ (k geheel > 0), terwijl deze extrema bij oneven n voorkomen bij waarden van x, welke groter zijn dan $k\pi$. De nadering van deze extrema tot $k\pi$ is monotoon.

Dergelijke eigenschappen gelden ook voor de $S_{2n+1}(x)$.

5. Asymptotische benadering van het nulpunt van $E_n(x)$.

Gevraagd het asymptotisch gedrag voor grote n te bepalen van de functie $\zeta = \zeta(n)$, welke voldoet aan $E_n(-\zeta) = 0$ en $\zeta \neq 0$.

In een nog te verschijnen rapport van de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum wordt aangetoond, dat

$$E_n(-y) = (-1)^n \frac{y^n}{n!} I(y,n) + \exp(-y) \qquad (5,1)$$

waarin

$$I(y,n) = \int_0^y e^{-u} \left(1 - \frac{u}{y}\right)^n du. \qquad (5,2)$$

Voor I(y,n) geldt de asymptotische ontwikkeling

$$I(y,n) = \frac{y}{n+y} \cdot \frac{1}{y} - \frac{ny}{(n+y)^3} + \ldots. \qquad (5,3)$$

Voor y gelden hierbij zekere beperkingen maar voor $y > 0$ is de toegepaste ontwikkeling zeker toegestaan.

Voor $y = \xi$ wordt het rechterlid van (5,1) gelijk aan nul, mits n oneven is.

Voert men nu nog in

$$a = \frac{\xi}{n} \qquad (5,4)$$

en substitueert men voor a in (5,1) de volgende asymptotische reeks

$$a = a_0 + \frac{b_1}{n} \log n + \frac{a_1}{n} + \frac{c_1}{n^2} \log^2 n + \ldots \qquad (5,5)$$

dan is het mogelijk de a_n, b_n, c_n enz. uit te rekenen.

Hier zullen slechts de a_0, a_1 en de b_1 bepaald worden:

$$\frac{a^n n^n}{n!} \left(\frac{a}{1+a} - \frac{a}{(1+a)^3 n} + \ldots\right) = \exp(-an).$$

Er geldt volgens Stirling:

$$n! = \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{12n} - \frac{1}{288n^2} \ldots\right)$$

en dus is

$$\exp(-a) = e\, a \sqrt[n]{\frac{T}{N}} \qquad (5,6)$$

waarin

$$T = \frac{a}{1+a} - \frac{a}{(1+a)^3 n} + \ldots$$

en $\quad N = \sqrt{2\pi n} \left(1 - \frac{1}{12n} - \frac{1}{288n^2} \ldots\right).$

Gemakkelijk berekent men:

$$\sqrt[n]{\frac{T}{N}} = \sqrt[n]{\frac{a_0}{(1+a_0)\sqrt{2\pi n}}} \left\{1 + O\left(\frac{\log n}{n^2}\right)\right\}$$

De a_0 is dus te bepalen uit

$$\exp(-a_0 - 1) = a_0$$

of $a_0 = 0{,}278464$. $\qquad$ (5,7)

Verder wordt

$$b_1 = \frac{a_0}{2(1+a_0)} = 0,108906 \qquad (5,8)$$

en de $a_1 = \frac{a_0}{2(1+a_0)} \log \frac{a_0^2}{(1+a_0)^2 \, 2\pi} = - 0,532124.$ (5,9)

6. Het aantal nulpunten van $C_{2n}(x)$ en $S_{2n+1}(x)$.

In onderstaand tabelletje is gegeven de graad van het C of S polynoom en daarachter het aantal reele nulpunten van dat polynoom.

$C_0(x)$	0	$S_5(x)$	1	$C_{10}(x)$	2
$S_1(x)$	1	$C_6(x)$	2	$S_{11}(x)$	3
$C_2(x)$	2	$S_7(x)$	3	$C_{12}(x)$	4
$S_3(x)$	3	$C_8(x)$	4	$S_{13}(x)$	5
$C_4(x)$	4	$S_9(x)$	5	$C_{14}(x)$	6

Dit tabelletje kan men met zeer eenvoudige hulpmiddelen verifieren. Heeft n.l. een polynoom een complex nulpunt ζ, dan is ook zijn toegevoegd complexe ζ^* een nulpunt. Maar vervanging van ζ door $-\zeta$ moet wegens de even (oneven) eigenschappen ook een nulpunt zijn. Dus de complexe nulpunten komen altijd in stellen van 4 voor. Daarmede is het eerste rijtje van het tabelletje bewezen.

Nu is $S_5(x) = x(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120})$

een polynoom, hetwelk groter dan de sin x blijft voor $x > 0$. De extremen van $(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120})$ liggen bij $x = \sqrt{10}$, maar de waarde van het minimum is nog positief: $S_5(x)$ heeft dus 1 reeel nulpunt en 4 complexe. Had nu $C_6(x)$ 6 reele nulpunten (het aantal is of 2 of 6), dan had volgens Rolle $S_5(x)$ er minstens 5 moeten hebben. Zo komt men $C_8(x)$. Maar $C_4(x)$ is voor $x < \sqrt{56}$ groter dan $C_8(x)$ en die op zijn beurt weer groter dan cos x. $C_8(x)$ heeft dus minstens evenveel nulpunten als $C_4(x)$, iets, wat ook algemeen geldt voor elk stel polynomen, hetwelk 4 in de graad afwijkt van elkaar.

Om aan te tonen dat $S_9(x)$ vijf reele nulpunten heeft, behoeft men slechts $S_9(4) = - 0,663$ uit te rekenen en een beetje rekenwerk levert ook het laatste rijtje uit het tabelletje.

Men ziet nu een zekere regelmaat komen, maar uit het volgende zal blijken, dat deze regelmaat eens verstoord wordt.

Uit de formules (5,1), (5,2) en (5,3) volgt

$$C_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{x^2}{4n^2+x^2} + \dots\right) \qquad (6,1)$$

De cos x is in absolute waarde begrensd door een. De term $\frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{x^2}{4n^2+x^2}$ kan ver boven deze waarde uitkomen en dus moet de waarde x zodanig gekozen worden, dat deze term ten hoogste 1 bereikt, wil men nog een nulpunt van het polynoom $C_{2n}(x)$ kunnen hebben. De extrema van cos x liggen bij $x = r\pi$ en op deze punten moet dus de bovenvermelde term kleiner dan een blijven.

$$\frac{(r\pi)^{2n}}{(2n)!} \quad \frac{(r\pi)^2}{4n^2+(r\pi)^2} \approx 1 .$$

Stelt men nu

$$\frac{r}{n} = q = q_0 + \frac{q_1}{n} + \frac{q_2}{n^2} + \dots + \frac{q_1'}{n} \log n + \dots \tag{6,2}$$

dan volgt

$$\frac{qe\pi}{2} = \sqrt[4n]{\left(\frac{4+q^2\pi^2}{q^2\pi^2}\right)^2 4\pi n} \left[1 - O\left(\frac{1}{n}\right)\right] .$$

Zo is $q_0 = \frac{2}{\pi e} = 0,23419933$ (6,3)

en $q_1' = \frac{e\pi}{2} = 4,2698670 .$ (6,3)

Het aantal nulpunten nader dus voor grote n tot $\left[n.q_0 + q_1' \log n\right]$.

Aangezien $q_0 > {}^1/5$, blijkt dus, dat het aan het begin dezer paragraaf gegeven tabelletje, niet zo zonder meer voortgezet kan worden. Het juiste aantal nulpunten bepalen is wel bijzonder lastig. Zoals reeds in [6] is opgemerkt, is het niet mogelijk cos n te berekenen met behulp van de asymtotische voorstelling. Nu zou men hier cos x met andere hulpmiddelen dienen te berekenen, om dan met behulp van (6,1) te zien of $C_{2n}(x)$ op x nog een nulpunt kan hebben.

De cos x op analytische wijze te schatten, waar x verkregen wordt door de asymptotische reeks met $n\pi$ te vermenigvuldigen, is niet zo'n prettig karweitje.

Numeriek is er zeker voor elke n met behulp van iteratie een q_1 aan te geven en dan is ook wel het aantal nulpunten te bepalen. Dit vereist dus voor elke n een hoeveelheid rekenwerk.

Voor de $S_{2n+1}(x)$-veeltermen is een soortgelijke beschouwing te houden en vindt men dan dat (6,2) en (6,3) gehandhaafd kunnen blijven.

7. Een volgende stap.

Functies welke veel overeenkomst vertonen met de exponentiele zijn de Besselfuncties.

Ten einde de afgebroken machtreeksen van deze functies te onderzoeken, voere men in:

$$I_{N,k}(x)=\sum_{h=0}^{N}\frac{x^h}{h!(h+k)!} \qquad \begin{matrix} k=0,1,2\ldots \\ N=0,1,2\ldots \end{matrix} \qquad (7,1)$$

Deze manier van definiering levert een voordeel op: Men vangt de beide Besselse functies tegelijkertijd, want

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ x\geqslant 0}} I_{N,k}(x)= I_k(2\sqrt{x})/(\sqrt{x})^k \qquad (7,2)$$

en
$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ x\geqslant 0}} I_{N,k}(-x)= J_k(2\sqrt{x})/(\sqrt{x})^k. \qquad (7,2)$$

Door middel van differentiatie heeft men nu

$$\frac{d}{dx}\, I_{N,k}(x)= I_{N-1,k+1}(x). \qquad (7,3)$$

Soortgelijke beschouwingen als bij exp x, voor $x\geqslant 0$ leveren nu voor $N>M$,

$$1\leqslant I_{M,k}(x)\leqslant I_{N,k}(x)<I_k(2\sqrt{x})/(\sqrt{x})^k, \qquad (7,4)$$

waarbij alle gelijktekens vervallen in (7,4) wanneer $x>0$. Bij vaste k is de monotoniteit van de functies (7,1) dus weer aangetoond.

Voor $x<0$ volgt uit de laatste gelijkheid (7,2) onder gebruikmaking van de bekende stelling van Hurwitz, dat de functies $I_{N,k}(x)$ bij voldoend grote N elk voorgeschreven aantal nulpunten kunnen hebben.

En ook hier weer ontmoet men het probleem bij eenmaal gekozen k, het aantal nulpunten te bepalen als functie van N. Dat dit niet eenvoudig zal zijn, na hetgeen men gezien heeft in het cosinus- of sinusgeval, is wel duidelijk. Hierbij komt nog, dat de $J_k(2\sqrt{x})$ geen periodieke functie meer is en dat de in de paragrafen 5 en 6 aangehaalde asymptotische ontwikkelingen tot op heden nog niet bewezen zijn voor de Besselfuncties.

Gemakkelijk ziet men in, dat $I_{1,k}(x)$ een nulpunt en slechts een bezit $[x=-(k+1)]$. $I_{2,k}(x)$ hebben voor $k>0$ geen nulpunten, wel een minimum, en voor $k=0$ een minimum-dubbel-nulpunt op $x=-2$. Volgens (7,3) zijn nu weer de $I_{3,k}(x)$ monotoon stijgende functies van x, welke een en slechts een nulpunt bezitten.

Uit de resttermvoorstelling van Lagrange vindt men weer, indien

$$R_{N,k}(x)= I_{\infty,k}(x) - I_{N,k}(x),$$

$$I_{\infty,k}(x)=\lim_{N\to\infty} I_{N,k}(x),$$

en $x\geqslant 0$:

$$R_{N,k}(x) = \int_0^x I_{\infty,k}^{(N+1)}(y) \frac{(x-y)^N}{N!} dy$$

$$= \int_0^x I_{\infty,k+N+1}(y) \frac{(x-y)^N}{N!} dy, \qquad (7,5)$$

en $$R_{N,k}(-x) = (-1)^{N+1} \int_0^x I_{\infty,k+N+1}(-u) \frac{(x-u)^N}{N!} du. \qquad (7,6)$$

De conclusie, welke direct uit (7,5) volgt, n.l. dat deze restterm altijd positief is, is reeds op andere wijze afgeleid. (7.6) wordt in verband met (7,2):

$$R_{N,k}(-x) = \frac{(-1)^{N+1}}{N!} \int_0^x J_{k+N+1}(2\sqrt{u}) \; (x-u)^N \, u^{-\frac{k+N+1}{2}} du. \qquad (7,7)$$

Voert men nu de volgende transformatie uit,

$$u = \frac{t^2}{4}$$

dan gaat (7,7) over in

$$R_{N,k}(-x) = \frac{(-1)^{N+1}}{N! \; 2^{k+N+2}} \int_0^{2\sqrt{x}} J_{k+N+1}(t) \frac{(x - \frac{t^2}{4})^N}{t^{k+N}} dt \qquad (7,8)$$

Het doel is nu aan te tonen, dat de integraal in (7,8) positief is voor elke waarde $x > 0$. Het analytische bewijs kan echter nog niet gegeven worden. Wel geldt het volgende, gedeeltelijk steunend op numerieke resultaten:

Indien z_0 en z_1 nulpunten zijn van $J_p(u)$, dan leidt men af:

$$\int_{z_0}^{z_1} u^{-p+1} J_p(u)du = - z_1^{-p+1} \; J_{p-1}(z_1) + z_0^{-p+1} \; J_{p-1}(z_0)$$

$$= z_0^{-p+1} \; J_p'(z_0) - z_1^{-p+1} \; J_p'(z_1).$$

Men weet, dat in de nulpunten z_0, z_1 enz. van $J_p(u)$, $z_0 \, J_p'(z_0)$ maximaal is. Afgaande op de gegevens verstrekt door Jahnke-Emde (9) is voor $p < 5000$, maar waarschijnlijk ook daarboven, $\frac{J_p'(z_0)}{z_0^{p-1}}$ een monotoon dalende functie van z_0. In het interval $0 < t \leq 2\sqrt{x}$, is $(x - \frac{t^2}{4})^N$ eveneens een monotoon dalende functie van t. De integraal is nu als volgt te minoreren:

Knip het integratiepad in stukken, welke telkens in een nulpunt van $J_p(t)$ beginnen, een nulpunt als inwendig punt en het volgende als tweede randpunt bevatten. In het begin- en eindpunt van elk stuk heeft de afgeleide van de Besselfunctie dus hetzelfde teken. Het eerste stuk heeft als eerste punt $t = 0$.

Het inwendige nulpunt verdeelt elk stuk van de integratieweg weer in tweeen. Over het eerste gedeelte is de integraal positief en wordt $(x - \frac{t^2}{4})$ geminoreerd door de waarde in het eindpunt. Over het tweede gedeelte is de integrand negatief en wordt $(x - \frac{t^2}{4})$ gemajoreerd door de waarde in het beginpunt, d.w.z. over elk stuk wordt nu $(x - \frac{t^2}{4})$ vervangen door de waarde, welke deze parabool aanneemt in het inwendige nulpunt. Nu ziet men dat, aangezien $\frac{|J_p(z_0)|}{z_0^{p-1}}$ monotoon dalend is, de integraal in het rechterlid van (7,8) positief moet zijn voor elke x. Voor even N en $x < 0$

$I_{N,k}(x)$ groter dan $I_{\infty,k}(x)$.

Voor oneven N is $I_{N,k}(x)$ kleiner dan $I_{\infty,k}(x)$.

Nu duikt ook weer de vraag naar het aantal snijpunten van $I_{N,k}(x)$ en $I_{M,k}(x)$ op. Slechts voor die waarden van N en M, welke een even getal verschillen, is er buiten $x = 0$ nog een ander snijpunt mogelijk. Edoch, er kunnen ook meerdere mogelijk zijn. Uit het feit, dat de $I_{4,k}(x)$ slechts een minimum kan vertonen, kan men evenals bij het cosinus-geval afleiden, dat elke twee functies, waarbij $N - M = 4$, slechts 2 snijpunten kunnen hebben. Een daarvan is steeds $x = 0$, het andere ligt bij negatieve waarde van x en voor limiet $N \to \infty$ gaat deze waarde naar $-\infty$.

Het snijpunt van $I_{N,k}(x)$ en $I_{N-2,k}(x)$ ligt bij $x = -N(N+k)$. Hieruit volgt dan weer dat, wanneer $I_{N-2,k}(x)$ is verondersteld ν nulpunten te bezitten, dan heeft $I_{N,k}(x)$ ook minstens ν nulpunten. Een verschil met het cos- resp. sin-geval is echter, dat wanneer de functie 1 complex nulpunt bezit, ook de toegevoegde complexe nulpunt is, maar niet de in de oorsprong gespiegelde.

8. Slot.

Het is duidelijk, dat de beschouwingen hier gehouden een parameter minder bevatten dan het werk van O. Blumenthal. De laatste heeft n.l. behalve de n ook nog de γ ter beschikking $(1+x)^{\gamma}$. Maar er is aan toegevoegd in het geval van de $E_n(x)$-polynomen, de asymptotische bepaling van het nulpunt en in het geval van de $C_{2n}(x)$- of $S_{2n+1}(x)$-polynomen, de asymptotische bepaling van het aantal nulpunten. Dit gelukte via asymptotische beschouwingen, welke voor het berekenen van de betrokken functies exp (-x), cos x en sin x absoluut geen betekenis hebben.

Men zou de veeltermen ook in het complexe vlak kunnen beschouwen, dus zich niet beperken tot reele waarden van x.

Tenslotte is er nog aan toegevoegd een(nog niet voltooide)uiteenzetting over de polynomen, welke ontstaan door het afbreken van Besselse functies.

Waarschijnlijk zal het wel mogelijk zijn aan te tonen langs analytische weg, dat in de nulpunten z_0 van $J_p(x)$ $\frac{|J_p'(z_0)|}{z_0^{p-1}}$ een monotoon dalende functie van z_0 is.

REFERENTIES:

1. O. Blumenthal, La géometrie des polynomes binomiaux. C.R.du Congres Liège 1939, p. 69-74.

2. Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, (1927), XXVI, VII. Theorems on approximate integration and summation of series.

3. G. Szegö, Ueber einige von Ramanujan gestellte Aufgaben. J.London Math.Soc., (3) 31 (1928), 225-232.

4. G.N. Watson, Theorems stated by Ramanujan. Proc.London Math.Soc., (2) 29 (1928), 293-308.

5. E.T. Copson, An approximation connected with e^{-x}. Proc.Edinb.Math.Soc., (2) 3 (1933), 201-206.

6. J. Berghuis, An approximation connected with cos n and sin n. R 72, Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum.

7. W. Rogosinski und G. Szegö, Ueber die Abschnitte von Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben. Math.Zeitschrift (28) 1 (1928), (73-94).

8. Polya en Szegö, Aufgaben und Lehrsätze, Vol.2, pag. 48.

9. Jahnke-Emde, Tables of higher functions, 169, Fig. 89.