

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

ZW 1956-006

Elementen der logica

Voordracht in de serie  
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr. E.W. Beth



Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

door

Prof. Dr E.W. Beth

27 maart 1956

ELEMENTEN DER LOGICA

1. Bij de gebruikelijke uiteenzetting van de elementen der hedendaagse logica wordt eerst een formeel stelsel opgebouwd; de eigenschappen hiervan worden diepgaand onderzocht, zonder rekening te houden met de beoogde interpretatie. Daarna wordt deze interpretatie ingevoerd en tenslotte wordt aangetoond, dat, op grond van de reeds eerder vastgestelde eigenschappen, de structuur van het formele stelsel geheel beantwoordt aan de gegeven interpretatie (volledigheidsstelling van Gödel).
2. Er is echter een meer natuurlijke opbouw mogelijk, waarbij reeds aanstonds de beoogde interpretatie wordt ingevoerd. Op grond daarvan kunnen we nu een aantal formele regels opstellen, waarna het bewijs van de volledigheidsstelling van Gödel geen enkele moeilijkheid meer oplevert.
3. Bewijs dat de sequent:

$$(x)[M(x) \rightarrow \overline{P(x)}] , (x)[S(x) \rightarrow M(x)] \vdash (x)[P(x) \rightarrow \overline{S(x)}]$$

op grond van de interpretatie geldig is.

<u>Waar</u>		<u>Onwaar</u>	
(1) $(x)[M(x) \rightarrow \overline{P(x)}]$		(3) $(x)[P(x) \rightarrow \overline{S(x)}]$	
(2) $(x)[S(x) \rightarrow M(x)]$		(4) $P(a) \rightarrow \overline{S(a)}$	
(5) $P(a)$		(6) $\overline{S(a)}$	
(7) $S(a)$		(i)	(ij)
(8) $M(a) \rightarrow \overline{P(a)}$		(9) $M(a)$	(11) $P(a)$
(i)	(ij)		
(12) $S(a) \rightarrow M(a)$	(10) $\overline{P(a)}$	(iij)	(iv)
		(13) $S(a)$	
(iij)	(iv)		
	(14) $M(a)$		

		(1) $(x) [M(x) \rightarrow \overline{P(x)}]$	(prem)
		(2) $(x) [S(x) \rightarrow M(x)]$	(prem)
		(5) $\frac{P(a)}{\text{-----}}$	(+ hyp 1)
		(7) $S(a)$	(+ hyp 2)
		(8) $M(a) \rightarrow \overline{P(a)}$	(1)
(i)		(12) $S(a) \rightarrow M(a)$	(2)
		(14) $M(a)$	(7) en (12)
(ij)		(10) $\overline{P(a)}$	(9) en (8)
		(6) $\overline{S(a)}$	(- hyp 2)
		(4) $\frac{P(a) \rightarrow \overline{S(a)}}{\text{-----}}$	(- hyp 1)
		(3) $(x) [P(x) \rightarrow \overline{S(x)}]$	(concl)

5. Bewijs dat de sequent:

$$(Ex) [M(x) \ \& \ \overline{P(x)}] , (Ex) [S(x) \ \& \ M(x)] \vdash (Ex) [P(x) \ \& \ \overline{S(x)}]$$

op grond van de interpretatie niet geldig is.

Waar		Onwaar			
(1) $(Ex) [M(x) \ \& \ \overline{P(x)}]$		(3) $(Ex) [P(x) \ \& \ \overline{S(x)}]$			
(2) $(Ex) [S(x) \ \& \ M(x)]$		(7) $P(a)$			
(4) $M(a) \ \& \ \overline{P(a)}$		(11) $P(a) \ \& \ \overline{S(a)}$			
(5) $M(a)$		(i)	(ij)		
(6) $\overline{P(a)}$		(12) $P(a)$	(13) $\overline{S(a)}$		
(8) $S(b) \ \& \ M(b)$		(15) $P(b) \ \& \ \overline{S(b)}$	(16) $P(b) \ \& \ \overline{S(b)}$		
(9) $S(b)$		(iij)	(iv)	(v)	(vi)
(10) $M(b)$		(17) $P(b)$	(18) $\overline{S(b)}$	(20) $P(b)$	(21) $\overline{S(b)}$
(i)	(ij)				
	(14) $S(a)$				
(iij)	(iv)	(v)	(vi)		
	(19) $S(b)$		(22) $S(b)$		

6. De rol van het begrip oneindig.