STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1959-006

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Dr. C.G. Lekkerkerker

18 april 1959

Indefiniete kwadratische vormen

1959

ZW 1959-006

Voordracht in de serie

"Actualiteiten"

door

Dr C.G. Lekkerkerker

18 april 1959

Indefiniete kwadratische vormen

1. Inleiding. Zij $n \geq 2$ en $q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ een indefiniete, reële, kwadratische vorm ($a_{ij}=a_{ji}$), met determinant $D=\det(a_{ij})$. We onderstellen steeds dat $D \neq 0$.

Punten met gehele coördinaten (roosterpunten) geven we aan met $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$, enz. De verzameling dezer punten geven we aan met U. We zijn geïnteresseerd in de onderste grens van $|q(u)|$ voor roosterpunten $u \neq 0$. Deze onderste grens behoeft niet als waarde aangenomen te worden. We stellen

$$(1) \qquad \mu(q) = \inf_{u\neq 0} |q(u)| \;, \quad \mu^+(q) = \inf_{q(u)>0} q(u), \quad \mu^-(q) = \inf_{q(u)<0} |q(u)| .$$

De vormen $q(x)$, met gegeven n en gegeven signatuur s, zijn (reëel) affien aequivalent, d.w.z. in elkaar over te voeren door een niet-singuliere, lineaire transformatie $x \longrightarrow Tx$. We merken terloops op, dat hierbij $q=q(x)$ overgaat in $q_T=q(Tx)$, met determinant $(\det T)^2 D$. Stel eens, dat we voor $\mu(q)$ een bovengrens hebben, die -- behalve van n en s -- alleen van $|D|$ afhangt. Zij $\mu = \mu(n,s)$ zo'n bovengrens, als $|D|=1$. Om homogeniteitsredenen is dan algemeen

$$(2) \qquad \mu(q) \leq \mu \cdot |D|^{1/n} \qquad \text{(gegeven n en s).}$$

De kleinste bovengrens μ die we in (2) kunnen nemen, geven we aan met $\bar{\mu}$, en de kleinste bovengrens voor $\mu(q)$, bij gegeven n,s en $|D|$, met $\bar{\mu}(q)$, het absolute minimum van q geheten. We hebben, bij gegeven n en s,

$$(3) \qquad \bar{\mu}(q) = \sup_{\det T=\pm 1} \mu(q_T) = \bar{\mu} \cdot |D|^{1/n} \;, \quad \bar{\mu} = \sup_{|D|=1} \mu(q).$$

Uit (1) volgt o.a. dat bij elke $\varepsilon > 0$ en elke vorm q een roosterpunt $u \neq o$ bestaat met $|q(u)| \leq \mu |D|^{1/n} + \varepsilon$, en $\bar{\mu}$ is het kleinste getal met deze eigenschap (we zullen straks zien dat $\bar{\mu}$ eindig is).

Het is soms nuttig de grootheid $\bar{\mu}$, of $\bar{\mu}(q)$, meetkundig te interpreteren. Als T niet-singulier is, noemen we de verzameling $\Lambda = TU$ der punten Tu, waarbij u de punten met gehele coördinaten doorloopt, een <u>(algemeen) rooster</u>. Het bestaat uit de punten

$$x = u_1 t^1 + u_2 t^2 + \ldots + u_n t^n \qquad (u_i \text{ geheel}),$$

waarbij t^i gegeven wordt door de i^{de} kolom van T. De grootheid $|\det T|$ -- de inhoud van het parallelotoop, voortgebracht door de vectoren $t^1, t^2, \ldots, t^n$ -- heet de <u>determinant</u> van het rooster, aangegeven met $d(\Lambda)$. We beschouwen een vaste vorm $q^0(x)$, met determinant D_0 en absoluut minimum $\bar{\mu}(q^0) = \mu_0$. We beschouwen ook het gebied S_0, bepaald door

$$(4) \qquad S_0 = \{ x \mid |q^0(x)| < 1 \} .$$

Het is een z.g. sterlichaam in R_n, heeft O als inwendig punt en is onbegrensd, daar q^0 indefiniet is. Als μ een positief getal is, dan is de ongelijkheid $\mu(q^0_T) \geq \mu$ aequivalent met de bewering dat het rooster TU geen punt $\neq o$ in het lichaam μS_0 heeft, ofwel dat $\mu^{-\frac{1}{2}} \cdot TU$ geen punt $\neq o$ in het lichaam S_0 heeft. Een rooster met deze eigenschap heet <u>toegelaten</u> voor S_0, en we stellen

$$\Delta(S_0) = \inf d(\Lambda) \qquad [\Lambda \text{ toegelaten voor } S_0] ,$$

met dien verstande dat $\Delta(S_0) = \infty$ als er geen toegelaten roosters zijn. De grootheid $\Delta(S_0)$ heet de <u>(rooster)determinant</u> van het lichaam S_0. In het bovenstaande heeft het rooster $\mu^{-\frac{1}{2}} TU$ determinant $\mu^{-n/2}$, als $\det T = \pm 1$. Op grond van (3) hebben we dan de formule

$$(5) \qquad \mu_0 = \bar{\mu}(q^0) = \Delta(S_0)^{-2/n} .$$

In het bijzonder correspondeert $\mu_0 = 0$ met $\Delta(S_0) = \infty$. Uit de stelling van Minkowski, toegepast op een convex deellichaam van S_0, volgt dat in elk geval $\Delta(S_0) > 0$ is, en dus de grootheid $\bar{\mu}$ in (3) eindig is. Nemen we voor S_0 en dat deellichaam bijv. de lichamen

$$\left| x_1^2 + \ldots + x_r^2 \mp (x_{r+1}^2 + \ldots + x_n^2) \right| < 1,$$

dan volgt dat $\bar{\mu} \leq \gamma_n$, waar γ_n (constante van Hermite) de corresponderende grootheid voor definiete vormen is.

We kunnen analoog definiëren en interpreteren de grootheden $\bar{\mu}^+(q)$ en $\bar{\mu}^-(q)$.

2. Vormen in weinig variabelen. In geval n=2 kunnen we zonder beperking nemen $q^0(x)=x_1x_2$, met determinant $D_0=-\frac{1}{4}$, terwijl $S_0=\{x \mid |x_1x_2| < 1\}$. Voor dit lichaam geldt

(6) $$\Delta(S_0) = \sqrt{5},$$

zodat algemeen geldt

(7) $$\bar{\mu}(q) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{|D/D_0|} = \sqrt{\tfrac{4}{5}|D|} \qquad (n=2).$$

Anders gezegd: steeds is $\mu(q) \leq \sqrt{\frac{4}{5}|D|}$, en dit kan niet verscherpt worden. Met name is $\mu(q)=1$, als $q(x)=x_1^2+x_1x_2-x_2^2$.

Bovenstaand resultaat hangt nauw samen met een klassieke stelling van Hurwitz over benadering van irrationale getallen, en vindt een aanzienlijke verfijning in de theorie van Markow (zie hiervoor [1], chapter III, en [2]). Later zijn eenvoudige arithmetische bewijzen van (7) gegeven door Landau [3], Macbeath [4] en Mordell [5]. Meetkundige bewijzen van (6) zijn gegeven door Ollerenshaw [6] en Delone [7]. Deze laatste bewijzen bestaan uit de volgende stappen:

1°. een S_0-toegelaten rooster Λ heeft een basis $\{a,b\}$ met a in het 1e en b in het 2e kwadrant; het is geen beperking aan te nemen dat ook a+b in het 2e kwadrant ligt.

2°. de oppervlakte van het parallelopan op a en b is hierbij minimaal, als a, b en a+b op de rand van S_0 liggen.

3°. als dit laatste optreedt, dan is die oppervlakte gelijk aan $\sqrt{5}$ en is Λ toegelaten voor S_0.

Beperken we ons tot positieve waarden, dan hebben we in geval n=2 het resultaat

(8) $$\bar{\mu}^+(q) = \sqrt{4|D|}\ , \text{ of wel } \Delta(S_0^+) = 1,$$

waarbij $S_0^+ = \{ x \mid 0 < x_1 x_2 < 1 \}$. Anders gezegd: steeds is $\mu^+(q) \leq \sqrt{4|D|}$, en dit kan niet verscherpt worden; we hebben $\mu^+(q^0)=1$.

Een bewijs van (8) is onder meer gegeven door Mahler [8] (zie ook [19]. Daar $\mu^-(q)=\mu^+(-q)$, hebben we ook $\bar{\mu}^-(q)=\sqrt{4|D|}$.

In de gevallen n=3,4 zijn verschillende signaturen mogelijk. Als n=3, dan is $s=\pm 1$, en wel s=1 als $D<0$ en s=-1 als $D>0$; als q positieve determinant heeft, dan heeft -q negatieve determinant, en daarbij is weer $\mu^-(q)=\mu^+(-q)$. De volgende resultaten zijn bekend:

(9) $\quad \bar{\mu}(q) = \sqrt[3]{\tfrac{2}{3}|D|}$ als n=3 (Markow [9], Davenport [10])

(10) $\quad \mu^+(q) = \sqrt[3]{4|D|}$ als n=3, s=1

(11) $\quad \mu^+(q) = \sqrt[3]{\tfrac{27}{4}|D|}$ als n=3, s=-1

(Davenport [11], Oppenheim [12]).

De bewijzen zijn arithmetisch en gebruiken verschillende eigenschappen voor binaire vormen. Mullineux [13] beschouwt het gebied $S_0: |x_1^2+x_2^2-x_3^2| < 1$, begrensd door een eenbladige en een tweebladige hyperboloïde, en bewijst onder meer dat $\Delta(S_0)=\sqrt{3/2}$. Vormen, waarvoor $\mu(q)$, resp. $\mu^+(q)$ de door (9), (10), (11) gegeven waarde heeft, zijn opvolgend:

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2+x_1x_3+x_2x_3 \;;\quad x_1^2+x_2x_3 \;;\quad -x_1^2+4x_2x_3.$$

Als n=4, dan kan s=0,2 of -2 zijn. Oppenheim bewijst dat $\bar{\mu}(q)=\sqrt[4]{\tfrac{4}{9}|D|}$ als s=0 en $\bar{\mu}(q)=\sqrt[4]{\tfrac{4}{7}|D|}$ als $s=\pm 2$ (zie Dickson [14], chapter IX en Oppenheim [15]). In Oppenheim [16] wordt $\bar{\mu}^+(q)$ berekend.

3. Vormen in veel variabelen. Voor $n \geq 5$ is de situatie geheel anders. Volgens een oude stelling van Meyer [1] neemt elke indefiniete, kwadratische vorm q(x) in vijf variabelen met gehele coëfficiënten de waarde 0 aan voor een geschikt roosterpunt $u \neq 0$. Oppenheim [15], p.727 merkt nu, voor willekeurige indefiniete vormen in 5 variabelen, op (L(f) is onze $\mu(q)$):

---

1) Vierteljahrsschrift Naturf.Gesell.Zürich 39, 209-222 (1884). Een verbeterd bewijs is te vinden in Dickson [14], chapter VI. De stelling kan ook afgeleid worden uit de analoge stelling voor vormen met gehele, p-adische coëfficiënten (stelling van Hasse).

"It is very likely true that L(f) must be zero when the coefficients are incommensurable. But this has not yet been proved".

Op dit ook nu nog onbewezen <u>vermoeden van Oppenheim</u> komen we straks terug. Op dit moment merken we slechts op dat, als dit vermoeden juist is, zeker $\mu(q)=0$ voor elke vorm in meer dan vijf variabelen. Meetkundig zou het betekenen dat elk sterlichaam

$$\left| x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2-x_{r+1}^2-\ldots-x_n^2 \right| < 1 \qquad (n \geqq 5,\ 1 \leqq r \leqq n-1)$$

roosterdeterminant ∞ heeft.

<u>Blaney</u> [17] bewijst onder meer

<u>Stelling 1.</u> Als $n \geqq 2$ en $q(x)$ niet negatief definiet is, dan is $\mu^+(q) \leqq p_n |D|^{1/n}$, waarbij we mogen nemen $p_n=2^{n-1}$.

<u>Bewijs.</u> Voor $n=2$ volgt de bewering uit (3). Laat de bewering juist zijn voor $n-1$. Onderstel verder dat $D=\pm 1$ en dat $\mu^+(q) > 0$ en zij α een positieve waarde $q(u)$, voldoende dicht bij $\mu^+(q)$. Door een geschikte aequivalentietransformatie gaat $q(x)$ over in een vorm $q_1(x)$ met $q_1(1,0,0,\ldots,0)=\alpha$. Dan is

$$q_1(x) = \alpha\left\{(x_1+\ldots)^2 + r(x_2,\ldots,x_n)\right\}\ ; \tag{12}$$

hierbij kan r indefiniet of positief of negatief definiet zijn. Stel eens dat een roosterpunt $\bar{u}=(u_2,\ldots,u_n)$ bestaat met $0 < |r(\bar{u})| = |r(u_2,\ldots,u_n)| < \frac{1}{4}$. Dan kunnen we een geheel getal u_1 en een natuurlijk getal k kiezen, zó dat

$$\frac{1}{\alpha}\, q_1(u_1,ku_2,\ldots,ku_n) = (u_1+\ldots)^2+k^2 r(\bar{u})$$

positief is en kleiner dan een vast getal < 1. Dit is een tegenspraak, omdat α dicht bij $\mu^+(q)$ ligt. Daar we op één van de vormen $\pm r(x)$ de inductieonderstelling mogen toepassen, vinden we dus dat

$$\frac{1}{4} \leqq p_{n-1}\, \alpha^{-n/(n-1)}\ , \text{ dus } \mu^+(q) \leqq (4p_{n-1})^{(n-1)/n}.$$

Met $p_2=2$ (of $p_1=1$) volgt hieruit de stelling.

<u>Gastinger</u> [18] analyseert bovenstaande methode nog verder en vindt o.a. dat men in stelling 1 kan nemen

$$p_n = \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \quad \text{voor } n \geqq 18 \quad .$$

Blaney [18] beschouwt ook ongelijkheden van de vorm

$$c_1 |D|^{1/n} \leqq q(u) \leqq c_2 |D|^{1/n}$$

(voor n=2 zijn zulke asymmetrische resultaten gegeven door Segre [19] en Lekkerkerker [20]). Oppenheim [21] leidt met een methode van Mordell (welke methode teruggaat op Gauss, Hermite en Korkin en Zolotarew) dat men kan nemen $p_n = p_{n-1}^{(n-1)/(n-2)}$.

Een andere kwestie is eveneens door Oppenheim [21] aangeroerd. Hij vergelijkt $\mu^+(q)$ en $\mu^-(q)$ en bewijst

Stelling 2. Zij $n \geqq 3$ en $q(x)$ indefiniet. Dan geldt:
als $\mu^+(q) = 0$, dan $\mu^-(q) = 0$, en omgekeerd.

Bewijs. Zij $D = \pm 1$, en een positieve waarde $q(u)$. Zij verder $q_1(x)$ een met $q(x)$ aequivalente vorm van de gedaante (12). De vorm $-r(x_2,\dots,x_n)$ is zeker niet negatief definiet en heeft determinant $\pm \alpha^{-n}$. Wegens stelling 1 is er dus een roosterpunt $\bar{u} = (u_2,\dots,u_n)$ met

$$0 < -r(\bar{u}) \leqq p_{n-1}\ \alpha^{-n/(n-1)}.$$

Beschouw nu de binaire vorm

$$f(x_1,t) = \frac{1}{\alpha} q_1(x_1, tu_2,\dots,tu_n) = (x_1 + \gamma t)^2 + t^2 r(\bar{u}),$$

met een zekere constante γ. Deze binaire vorm heeft determinant $r(\bar{u})$; wegens (8), toegepast op $-f(x_1,t)$, bestaan dan een geheel getal u_1 en een natuurlijk getal k met

$$0 < -f(u_1,k) = -\frac{1}{\alpha} q_1(u_1, ku_2,\dots,ku_n) \leqq 2\sqrt{-r(\bar{u})}.$$

Dus heeft $q(x)$ een negatieve waarde $-\beta = q(v)$ met

$$\beta \leqq 2\alpha \sqrt{-r(\bar{u})} \leqq 2\sqrt{p_{n-1}} \cdot \alpha^{(n-2)/(2n-2)}.$$

Als nu $n \geqq 3$ en α willekeurig klein genomen kan worden, dan is ook β willekeurig klein, i.e. als $\mu^+(q)=0$, kan ook $\mu^-(q)=0$. Het omgekeerde volgt door dit toe te passen op de vorm $-q$.

Er valt op te merken dat stelling 2 niet doorgaat voor binaire vormen. Zo is $\mu^+(q)=0$ en $\mu^-(q) > 0$ als $q(x) = x_2(x_1 - \theta x_2)$, en in de kettingbreuk voor θ de wijzergetallen met even index begrensd zijn en die met oneven index niet. Dit is ook opgemerkt door Cugiani [22] , die de waardenverdeling van $x_1^2-\theta x_2^2$ onderzoekt voor gehele x_1, x_2.

Als het vermoeden van Oppenheim juist is, dan is voor vormen q in $n \geqq 5$ variabelen zowel $\mu^+(q)=0$ als $\mu^-(q)=0$, en liggen de waarden $q(u)$ dicht op de reële getallenrechte.

We vermelden thans enige resultaten die in de richting van het vermoeden van Oppenheim wijzen. Davenport en Heilbronn [23] beschouwen speciale vormen in 5 variabelen, en bewijzen dat $\mu(q)=0$ als $q(x)=\sum_1^5 c_i x_i^2$.[1] Het bewijs berust op methoden van Hardy en Littlewood uit de analytische getallentheorie en is opgezet als volgt. Wegens de stelling van Meyer mogen we onderstellen dat niet alle quotiënten c_i/c_j rationaal zijn. Zij P een groot natuurlijk getal en stel

$$S(\alpha)=\sum_{n=1}^{P} e^{2\pi i\alpha n^2}, \quad I(\alpha)=\int_0^P e^{2\pi i\alpha x^2}\,dx,$$

waarin α een reëel getal is. Voor willekeurige reële η hebben we de formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\eta\alpha} \cdot \left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha = \max(0, 1-|\eta|).$$

Dan is

$$(13) \quad \sum_{u_1,\ldots,u_5=1}^{P} \max(0,1-|q(u_1,\ldots,u_5)|) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\prod_{i=1}^{5} S(c_i\alpha)\right\}\left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha,$$

$$(14) \quad \int_0^P \cdots \int_0^P \max(0,1-|q(\xi_1,\ldots,\xi_5)|)\,d\xi_1\ldots d\xi_5$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\prod_{i=1}^{5} I(c_i\alpha)\right\}\left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

Het linkerlid van (14) blijkt gemakkelijk groter dan een positieve constante maal P^3 te zijn. Het grootste deel van het bewijs van Davenport en Heilbronn bestaat in het schatten van het verschil tussen de rechterleden van (13) en (14). Voor een oneindige rij waarden van P blijkt dit verschil van lager orde dan P^3 te zijn. Dan zijn er een constante $\gamma>0$ en oneindig veel waarden van P, waarvoor de ongelijkheden

$$1 \leqq u_i \leqq P \; (i=1,\ldots,5), \quad |q(u_1,\ldots,u_5)| < 1$$

---

1) Het analoge resultaat met 9 in plaats van 5 kwadraten was eerder gevonden door Chowla.

meer dan γP^3 oplossingen hebben. Passen we dit toe op $\frac{1}{\varepsilon} q(x)$, als $\varepsilon > 0$, dan geldt dezelfde conclusie voor het stelsel

$$1 \leqq u_i \leqq P \ (i=1,\dots,5) \ , \quad |q(u_1,\dots,u_5)| < \varepsilon .$$

D.w.z. $\mu(q)=0$.

Watson [24] plaatst er één gemengde term bij. Tenslotte bewijst Davenport [25] met soortgelijke methoden

Stelling 3. Het vermoeden van Oppenheim is juist als

$$n \geqq 74 \ , \quad |s| \leqq n - 74 .$$

Voor een gehele vorm q (en dus ook voor het veelvoud van een gehele vorm) zijn $\mu^+(q)$ en $\mu^-(q)$ positief - alhoewel $\mu(q)=0$ voor $n \geqq 5$ -, omdat de waarden q(u) discreet liggen en de waarde 0 niet meedoet bij de bepaling van $\mu^+(q)$ en $\mu^-(q)$. Oppenheim [26] beschouwt nulvormen, dat zijn vormen q(x) die voor een of ander roosterpunt $u \neq 0$ de waarde 0 aannemen. Laat q(x) incommensurabel heten, als q(x) niet een veelvoud van een gehele vorm is. Oppenheim [26] toont nu aan

Stelling 4. Als $n \geqq 5$ en q(x) een incommensurabele nulvorm is, dan is $\mu^+(q)=\mu^-(q)=0$.

Het bewijs van deze stelling verloopt in 2 stappen:

1. als q(x) niet de beweerde eigenschap heeft, dan is hij rationaal te transformeren in een vorm $q_1(x)$ van de gedaante

$$q_1(x) = h(x_1x_2+\theta\, x_2^2+c_3x_3^2+\dots+c_nx_n^2), \tag{15}$$

waarin de c_i geheel zijn en h en θ reële getallen zijn. Dit wordt afgeleid uit de gelijkverdeling modulo 1 van de rij getallen $n^2\theta_1+n\theta_2$ ($n=1,2,\dots$; θ_1 en θ_2 niet beide rationaal).

2. voor een vorm $q_1(x)$ van de gedaante (15) is $\mu^+(q_1)=\mu^-(q_1)=0$. Dit wordt afgeleid uit de genoemde gelijkverdelingseigenschap en een belangwekkende hulpstelling, die zegt dat onder de waarden $q_2(u)$ van een gegeven gehele, ternaire, kwadratische vorm $q_2(x)=c_1x_1^2+c_2x_2^2+c_3x_3^2$ alle termen uit een geschikte rekenkundige rij $Am+B$ ($m=1,2,\dots$) voorkomen.

Oppenheim [27] bewijst dat stelling 4 zelfs doorgaat voor $n=4$. Hij gebruikt daarbij de gelijkverdeling van de rij getallen

$a_n=\theta\, p_n^{\,2}$ (θ irrationaal, $p_n=n^e$ priemgetal) en enige eigenschappen uit de geslachtentheorie van binaire, kwadratische vormen. Voor n=2 geldt de stelling niet, wegens een eerder gemaakte opmerking. Voor n=3 is het probleem nog onopgelost.

4. Isolatie van vormen. Bij gegeven n en s heeft de uitdrukking $\mu(q)|D|^{-1/n}$ bovenste grens $\bar{\mu}$ (zie (3)). Een verschijnsel dat zich bij indefiniete, kwadratische (en ook andere) vormen vaak voordoet, althans voor $n \leq 4$, is dat de genoemde uitdrukking niet continu afhangt van de coëfficiënten van q. Precies gezegd: deze uitdrukking is geen continue functie van het punt $(a_{ij})_{i\leq j}$ in de $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimensionale, Euclidische ruimte, waardoor we q kunnen representeren. Laten we schrijven $q \sim q^0$ als q aequivalent is met q^0 en $q \approx q^0$ als q aequivalent is met een veelvoud van q^0. Het is triviaal, dat $\mu(q)=\mu(q^0)$ als $q\sim q^0$ en dat $\mu(q)|D|^{-1/n}=\mu(q^0)|D_0|^{-1/n}$ als $q\approx q^0$. Het komt nu, ingeval $n \leq 4$, vaak voor dat bij een gegeven vorm q^0 met minimum $\mu(q^0)>0$ een getal $\delta>0$ en een omgeving Ω van q^0 bestaan zodanig dat

(16) $$\mu(q)\,|D|^{-1/n} < \mu(q^0)|D_0|^{-1/n} - \delta \quad \text{als } q\in\Omega \text{ en } q \not\approx q^0.$$

In dat geval noemen we de vorm q^0 en het minimum $\mu(q^0)$ geïsoleerd. We kunnen natuurlijk, omdat $|D|$ continu is, de voorwaarde voor isolatie vervangen door de eis: er bestaan een getal $\delta>0$ en een omgeving Ω van q^0 zodanig dat

(16') $$\mu(q) < \mu(q^0) - \delta \quad \text{als } q\in\Omega \text{ en } q \not\approx q^0.$$

Verder is, als $q\in\Omega$ en Ω , voldoende klein is, $q\approx q^0$ alleen mogelijk als q een veelvoud is van q^0. Anderzijds kan het voorkomen dat er niet slechts van locale isolatie sprake is, maar dat we in (16) voor Ω het gebied in $R_{\frac{1}{2}n(n+1)}$ kunnen nemen van alle vormen q met gegeven n en s.

Een eenvoudige isolatiestelling van Rogers (gepubliceerd in [1], zie ook Remak [28]) luidt als volgt.

Stelling 5. Zij $q(x)=x_1^{\,2}+\beta\, x_1x_2-\gamma\, x_2^{\,2}$ een indefiniete, rationale, binaire vorm, met minimum $\mu=\mu(q)>0$ (wortels van $q(x_1,1)=0$ irrationaal). Laat zowel μ als $-\mu$ als waarde $q(u)$ voorkomen. Dan is q geïsoleerd.

Bewijs. Laat q(x) het product zijn van twee lineaire vormen

$$l(x) = x_1-\theta x_2 \ , \ m(x) = x_1-\varphi x_2,$$

en laten u^1,u^2 twee roosterpunten zijn met

$$l_1 = l(u^1) > 0 \ , \quad m_1 = m(u^1) > 0 \ , \quad l_1 m_1 = \mu \ ;$$
$$l_2 = l(u^2) > 0 \ , \quad m_2 = m(u^2) < 0 \ , \quad l_2 m_2 = -\mu \ .$$

Zij verder T een aequivalentietransformatie van $q(x)$, die $l(x)$ in $\tau\, l(x)$ en $m(x)$ in $\tau^{-1}m(x)$ overvoert, waarbij $0<\tau<1$.

Beschouw nu een naburige vorm $q^*(x) = l^*(x)\, m^*(x)$ met $l^*=x_1-\theta^* x_2=l-\rho(l-m)$, $m^*=x_1-\varphi^* x_2=m-\sigma(l-m)$, waarbij $|\rho|$ en $|\sigma|$ klein zijn. Ingeval $\rho<0$ werken we met het roosterpunt u^1. We hebben, als n een natuurlijk getal is,

$$l^*(T^n u^1) = \tau^n(1-\rho)l_1 + \tau^{-n}\rho\, m_1 \ ;$$

kiezen we n zó dat $\tau^{2n}(1-\rho)l_1 \leqq -\rho\, m_1 < \tau^{2(n+1)}(1-\rho)l_1$, dan is $0<l^*(T^n u^1) < \tau^n(1-\tau^2)l_1$. Verder is $m^*(T^n u^1)=\tau^{-n}(1+\sigma)m_1-\tau^n\sigma\, l_1$ bij benadering gelijk aan $\tau^{-n}m_1$. Dus $|q^*(T^n u^1)|$ is niet veel groter dan $(1-\tau^2)l_1 m_1=(1-\tau^2)\mu$.

Ingeval $\rho>0$ krijgen we een soortgelijk resultaat als we werken met u^2. Daaruit volgt de stelling.

In de meergenoemde theorie van Markow wordt een rij vormen $q_i (i=1,2,\ldots,n)$ afgeleid, zodanig dat de rij getallen $\mu(q_i)|D_i|^{-1/2}$ monotoon daalt van $2/\sqrt{5}$ tot $2/3$ en dat

$$(17) \qquad \mu(q)|D|^{-1/2} \leqq \frac{2}{3} \quad \text{als } q\approx q_i \text{ voor géén } i.$$

De waarde 2/3 is niet geïsoleerd.

Voor n=3,4 zijn ook enige geïsoleerde vormen gevonden (zie [9] en [14] . Wenkow [29] vindt voor n=3 de eerste 11 geïsoleerde vormen, door een uitvoerig meetkundig onderzoek. Hij gaat uit van een ternaire vorm $q(x)$ met minimum $\mu(q)=1$ en determinant $|D|\leqq \frac{9}{2}$, kiest een geschikte basis van het rooster U en gaat dan van verschillende roosterpunten na of ze binnen dan wel buiten de kegel $q(x)=0$ liggen. Het resultaat is dat aan $\mu(q)=1$, $0<D\leqq\frac{9}{2}$ voldaan wordt door 11 niet-aequivalente vormen, met opvolgend

$$D = \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{25}{8},\ \frac{1200}{343},\ \frac{7}{2},\ \frac{15}{4},\ \frac{507}{125},\ \frac{112}{27},\ \frac{135}{32},\ \frac{9}{2}\ .$$

De voor n=2,3,4 bekende geïsoleerde vormen zijn alle rationaal.

Voor n=3 en 4 treedt het verschijnsel van isolatie ook op bij de grootheid $\mu^+(q)$ (zie [12] en [16]).

Cassels en Swinnerton-Dyer [30] leiden voor ternaire vormen een isolatieeigenschap af, die verder gaat dan de corresponderende stelling 5 voor binaire vormen.

Stelling 6. Zij $q(x)$ een indefiniete, rationale, ternaire vorm met minimum $\mu = \mu(q) > 0$. Dan is $\mu(q_1)=0$, en zelfs $\mu^+(q_1)=\mu^-(q_1)=0$ voor elke vorm q_1 in een geschikte omgeving van q, die geen veelvoud is van q.

Bij het bewijs spelen de aequivalentietransformaties van q, en derzelver eigenwaarden een rol, alsook de stelling van Kronecker voor een vorm in 2 variabelen. Kon men bewijzen, dat $\mu(q)=0$ voor alle ternaire, incommensurabele q, dan zou, in verband met de stelling van Meyer, het vermoeden van Oppenheim bewezen zijn. In [30] wordt bewezen dat deze hypothese aequivalent is met de bewering dat het sterlichaam

$$\min(|x_2^2-x_1x_3|\ ,\ |x_2^2-x_1x_3-x_3^2|) \leqq 1$$

oneindige roosterdeterminant heeft.

Literatuur

[1] J.W.S. Cassels, An introduction to diophantine approximation, Cambridge 1957.

[2] C.G. Lekkerkerker, Geometric deduction of Markov's minimal forms, Mathematisch Centrum, Rapport ZW1959-008.

[3] E. Landau, Ueber das Produkt von zwei binären Linearformen, Trav.Inst.Math.Tbilissi 5, 143-144 (1938).

[4] A.M. Macbeath, The minimum of an indefinite binary quadratic form, Journ. London M.S. 22, 261-262 (1947).

[5] L.J. Mordell, On the product of two linear homogeneous forms, J.London M.S. 13, 186-187 (1938).

[6] K. Ollerenshaw, On the minima of indefinite quadratic forms, J. London M.S. 23, 148-153 (1948).

[7] B.N. Delone, Lokalnyj metod w geometrii tsjisel, Izwestia Akademii Nauk SSSR 9, 241-256 (1945).

[8] K. Mahler, A theorem of B. Segre, Duke M. Journ. 12, 367-371 (1945).

[9] A.A. Markoff, Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies, Math. Annalen 56, 233-251 (1903).

[10] H. Davenport, On a theorem of Markoff, J. London M.S. 22, 96-99 (1947).

[11] H. Davenport, On indefinite ternary quadratic forms, Proc. London M.S. (2) 51, 145-160 (1949).

[12] A. Oppenheim, One-sides inequalities for quadratic forms, I Ternary forms, Proc. London M.S.(3),3, 328-337 (1953).

[13] N. Mullineux, Lattice points in the star body K: $|x_1^2+x_2^2-x_3^2| \leq 1$, $|x_3| \leq \sqrt{2}$, Proc.London M.S. (2),54, 1-41 (1954).

[14] L.E. Dickson, Studies in the theory of numbers, Chicago 1930.

[15] A. Oppenheim, The minima of indefinite quaternary quadratic forms, Proc.National Acad.Sciences USA 15, 747-727 (1929).

[16] A. Oppenheim, One-sided inequalities for quadratic forms, II Quaternary forms, Proc.London M.S. (3),3, 416-429 (1953).

[17] H. Blaney, Indefinite quadratic forms in n variables, J. London M.S. 23, 153-160 (1948).

[18] W. Gastinger, Ueber die untere Grenze der positiven Werte reeller quadratischer Formen, Monatshefte Math.56, 49-60 (1952).

[19] B. Segre, Lattice-points in infinite domains and asymmetric diophantine approximations, Duke M. Journ.12, 337-365 (1945).

[20] C.G. Lekkerkerker, On the determinant of an asymmetric hyperbolic region, Annali di Mat.Pura ed Appl. (4), 38, 253-266 (1955).

[21] A. Oppenheim, Values of quadratic forms I, Quarterly Journ.M. (2), 4, 54-59 (1953).

[22] M. Cugiani, Sopra una questione di approssimazione diofantea non lineare, Bollettino della U.M.I. (3), 10, 489-497 (1955).

[23] H. Davenport-H. Heilbronn, On indefinite quadratic forms in five variables, J.London M.S. 21, 185-193 (1946).

[24] G.L. Watson, On indefinite forms in five variables, Proc.London (3), 3, 170-181 (1953).

[25] H. Davenport, Indefinite quadratic forms in many variables, Mathematika 3, 81-101 (1956).

[26] A. Oppenheim, Values of quadratic II, Quarterly Journ.M. (2), 4, 60-66 (1953).

[27] A. Oppenheim, idem III, Monatshefte Math.57, 97-101 (1953).

[28] R. Remak, Ueber indefinite binäre quadratische Minimalformen, Math. Annalen 92, 155-182 (1924).

[29] B.A. Wenkow, Ob ekstremalnoj probleme Markowa dlja neopredelennych trojnitsjnych kwadratitsjnych form, Izwestia Akademii Nauk SSSR 9, 429-494 (1945).

[30] J.W.S. Cassels-H.P.F. Swinnerton-Dyer, On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms, Phil.Transactions R. Soc.London A 248, 73-96 (1955).