STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1960 - 006

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

P.C. Baayen

27 mei 1960

Subdirect oplosbare cylinder-algebra's

1960

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1960-006

Voordracht in de serie "Actualiteiten"
door

P.C. Baayen

27 mei 1960

Subdirect oplosbare cylinder-algebra's

1. De theorie der cylinder-algebra's dankt haar ontstaan, evenals de theorie der boole-algebra's, aan de logica. Inzicht in de verwantschap met de logica - die zeer helder wordt beschreven in HENKIN [2] en in HALMOS [2] - is echter zeker geen conditio sine qua non voor het bestuderen van boole-algebra's of cylinder-algebra's; zoals bekend kunnen deze structuren geheel algebraisch worden beschreven, en zij bezitten diverse extra-logische interpretaties. Ook geven zij aanleiding tot vele zuiver algebraische problemen. Met een van deze problemen, gesteld door HENKIN [4] , wil deze voordracht zich bezig houden.

Men kan in de theorie der cylinder-algebra's op natuurlijke wijze de begrippen direct product en subdirect product invoeren. Een cylinder-algebra $\mathfrak{A}$ worde dan subdirect oplosbaar genoemd, als er cylinder-algebra's $\mathfrak{A}_\gamma$ ($\gamma \varepsilon \Gamma$) bestaan, zodanig dat $\mathfrak{A}$ isomorf is met een subdirect product van de $\mathfrak{A}_\gamma$, terwijl $\mathfrak{A}$ met geen der $\mathfrak{A}_\gamma$ zelf isomorf is. Het is dan betrekkelijk eenvoudig de volgende stelling te bewijzen:

> Een cylinder-algebra is dan en slechts dan subdirect oplosbaar als de doorsnede van alle niet-triviale idealen uit het nul-element alleen bestaat.

Hieruit volgt in het bijzonder:

> Als een cylinder-algebra $\mathfrak{A}$ twee niet-triviale idealen E_1, E_2 bezit met $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, dan is $\mathfrak{A}$ subdirect oplosbaar.

In een seminar, gehouden in Berkeley, in het voorjaarssemester 1958, liet HENKIN het probleem open of de omkering van deze stelling juist is, d.w.z. of iedere subdirect oplosbare cylinder-algebra $\mathfrak{A}$ altijd twee niet triviale idealen E_1, E_2 bezit met $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Het is mij niet gelukt dit probleem volledig op te lossen; maar in deze voordracht zal een bevestigend antwoord worden gegeven voor twee belangrijke categoriën algebra's; nl. voor alle locaal eindig-dimensionale cylinder-algebra's, en voor alle cylinder-algebra's die tenminste één atoom bezitten.

2. Het begrip cylinder-algebra is afkomstig van TARSKI en THOMSON [1] ; het is voornamelijk bestudeerd door HENKIN [1],[2], [3],[4] . In volle algemeenheid luidt de definitie:

Zij N een ordinaalgetal (ev. transfiniet). Een N-dimensionale cylinder-algebra is een algebraisch systeem $<A,\cdot,+,-,C_i,d_{ij},0,1>$, met $0 \leq i,\ j < N$. Hierbij is het partiële systeem $<A,\cdot,+,-,0,1>$ een boole-algebra; alle d_{ij} zijn elementen van A; en de C_i zijn enkelvoudige operaties in A. Verder moet aan de volgende axiomas voldaan zijn, voor willekeurige $x,y \in A$ en $i,j,k < N$:

A_1. $x.C_ix=x$;

A_2. $C_i(x.C_iy) = C_ix.C_iy$;

A_3. $C_iC_jx = C_jC_ix$;

A_4. $d_{ii} = 1$;

A_5. als $i,j \neq k$, dan is $d_{ij}=C_k(d_{ik}.d_{jk})$; is er geen k zodanig dat $i,j \neq k$, dan is $d_{ij}=d_{ji}$;

A_6. als $i \neq j$, dan is $C_i(d_{ij}.x).C_i(d_{ij}.-x)=0$; is er geen j zodanig dat $i \neq j$, dan is $C_i0=0$.

Het is niet moeilijk voorbeelden van cylinder-algebras te geven. Zo wordt iedere boole-algebra tot een cylinder-algebra, als we definiëren: $d_{ij}=1$, voor alle $i,j<N$, en $C_ix=x$, voor alle x en alle $i<N$; hierbij kan de dimensie N willekeurig gekozen worden. (Omgekeerd kan worden aangetoond dat een cylinder-algebra, waarin $d_{ij}=1$ voor tenminste één paar i,j met $i \neq j$, in essentie alleen maar een boole-algebra is; want dan is $d_{kl}=1$ voor alle $k,l<N$, en $C_kx=x$, voor alle $x \in A$ en alle $k<N$.)

Een minder triviaal, maar nog betrekkelijk eenvoudig voorbeeld is het volgende. Zij X een niet-lege verzameling, en beschouw de verzameling X^N. (De elementen van X^N zijn alle rijen $\{x_i\}_{i<N}$ waarvoor alle $x_i \in X$.) Zij $D_{ij}=\{x \in X^N : x_i=x_j\}$, voor $i,j<N$, en definieer de operaties C_i $(i<N)$ als volgt: als $S \subset X^N$, dan zij

$$C_i S = \{ x \in X^N : \text{er is een } y \in S \text{ met } y_j = x_j \text{ voor alle } j \neq i \} .$$

Als dan A een klasse van deelverzamelingen van X^N is, die $\emptyset$, X^N, en alle D_{ij} bevat, en die gesloten is t.o.v. de vorming van doorsnede, vereniging en complement, en t.o.v. alle cylinder-operaties C_i, dan blijkt het stelsel $\langle A, \cap, \cup, \neg, C_i, D_{ij}, \emptyset, X^N \rangle$ een cylinder algebra te zijn. Een dergelijke cylinder-algebra heet uitgesproken concreet.

De concrete cylinder-algebra's worden op een dergelijke wijze gedefinieerd; het enige verschil met de definitie van de uitgesproken concrete cylinder-algebra's is, dat overal X^N door I wordt vervangen, waar I een verzameling is van de vorm $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma^N$ (alle X_γ niet leeg, en onderling disjunct; ook $\Gamma \neq \emptyset$). In wezen zijn de concrete algebras directe producten van uitgesproken concrete algebra's.

In figuur 1 is schematisch weergegeven de uitgesproken concrete algebra van alle deelverzamelingen van $[0,1]^2$; in figuur 2 is weergegeven een concrete cylinder-algebra die isomorf is met het directe product van de algebra in figuur 1 met zichzelf.

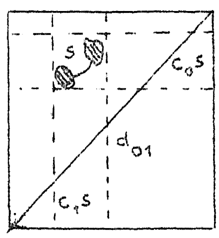

fig.1

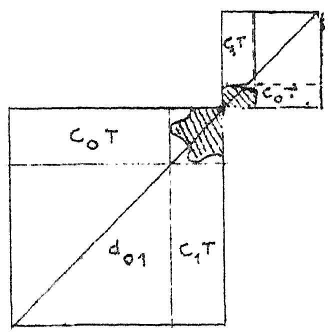

fig.2

3.' Uit de axiomas A_1-A_6 en de algemene eigenschappen van boole-algebra's kan een menigte van relaties worden afgeleid. Bij wijze van voorbeeld volgt nu een aantal dergelijke relaties.

3.1 $x \leq C_i x$.

Bewijs: Volgt uit A_1.

3.2 $C_i d_{ij} = 1$.

Bewijs: $C_i d_{ii} = C_i 1 \geq 1$ (A_4, 3.1); dus $C_i d_{ii} = 1$. Als $i \neq j$, dan is

$$C_i d_{ij} = C_i(d_{ij}, d_{ij}) = d_{jj} = 1, \text{ volgens } A_5 \text{ en } A_4.$$

3.3. $C_i x=0 \Leftrightarrow x=0$.

<u>Bewijs</u>: $C_i x=0 \Rightarrow x \leq 0$ (3.1) $\Rightarrow x=0$. Omgekeerd is $C_i 0=0$ als er geen $j \neq i$ is, volgens A_6; is er wel een $j \neq i$, dan is $C_i 0=C_i 0.C_i d_{ij}$ (3.2) $= C_i(d_{ij}.1) = C_i(d_{ij}.0).C_i(dij.-0)=0$ (A_6).

3.4. $C_i(-C_i x) = -C_i x$.

<u>Bewijs</u>: $C_i(-C_i x).C_i x=C_i(-C_i x.C_i x)$ (A_2) $= C_i 0=0$ (3.3), en dus $C_i(-C_i x) \leq -C_i x$.

Volgens 3.1 is ook $-C_i x \leq C_i(-C_i x)$. Dus $C_i(-C_{ix})=-C_{ix}$.

3.5. $C_i C_i x = C_i x$.

<u>Bewijs</u>: $C_i C_i x = C_i--C_i x = --C_i x$ (3.4) $= C_i x$.

3.6. $x \leq y \Rightarrow C_i x \leq C_i y$.

<u>Bewijs</u>: $x \leq y \Rightarrow x \leq C_i y$ (3.1) $\Rightarrow x.C_i y=x \Rightarrow C_i x.C_i y=C_i x$ (A_6) $\Rightarrow C_i x \leq C_i y$.

3.7. $C_i(x+y) = C_i x+C_i y$.

<u>Bewijs</u>: $x \leq x+y \Rightarrow C_i x \leq C_i(x+y)$ (3.6). Evenzo $C_i y \leq C_i(x+y)$. Dus $C_i x+C_i y \leq C_i(x+y)$.

Omgekeerd is $x \leq C_i x \leq C_i x+C_i y$ en $y \leq C_i y \leq C_i x+C_i y$, dus $x+y \leq C_i x+C_i y$. Er volgt: $(x+y).-(C_i x+C_i y)=(x+y).-C_i x.-C_i y=0$; $C_i\,[(x+y).-C_i x.-C_i y] = C_i(x+y).C_i(-C_i x).C_i(-C_i y) =$
$= C_i(x+y).-C_i x.-C_i y=0$ (3.3, A_2, 3.4); $C_i(x+y) \leq C_i x+C_i y$.

Uit 3.1, 3.5 en 3.7 volgt dat C_i een afsluitingsoperator is. In het bijzonder valt de theorie der 1-dimensionale cylinder-algebra's samen met de theorie van de topologische boole-tralies waarin ieder open element ook gesloten is (vgl. 3.4).

De 1-dimensionale cylinder-algebra's worden ook wel <u>monadische</u> algebra's genoemd en zijn uitvoerig bestudeerd door HALMOS [3] .

In het volgende zijn generalisaties van de relaties 3.1-3.7 nodig. Om deze eenvoudig te kunnen neerschrijven, komt eerst een definitie.

3.8. Als a een eindige niet-lege verzameling indices is, $a=\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}$, met $i_1 < i_2 < \ldots < i_n < N$, dan zij $C_a x = C_{i_1} C_{i_2} \ldots C_{i_n} x$, en $d_a = \prod_{i,j \in a} d_{ij}$. Verder zij $d_\emptyset=1$, en $C_\emptyset x=x$, voor alle x.

Er geldt dan, als a,b twee eindige verzamelingen van indices $< N$ zijn:

3.10. $c_a(x.C_a y) = C_a x.C_a y$.

3.11. $x \leq C_a x$.

3.12. $C_a d_b = d_{b \setminus a}$.

3.13. $C_a x = 0 \Leftrightarrow x=0$; $C_a 1 = 1$.

3.14. $C_a - C_a x = -C_a x$.

3.15. $C_a C_b x = C_{a \cup b} x$.

3.16. $x \leq y \Rightarrow C_a x \leq C_a y$.

3.17. $C_a(x+y) = C_a x + C_a y$.

De meesten van deze relaties worden bewezen door inductie naar het elementen-aantal van a, met gebruikmaking van de overeenkomstige relaties 3.1-3.7.

4. Ook bij cylinder-algebra's is er een 1.1.duidig verband tussen de homomorfe afbeeldingen van een algebra $\mathfrak{A}$ op een andere algebra, en de idealen van $\mathfrak{A}$; tenminste als een ideaal van een cylinder-algebra $\mathfrak{A}$ als volgt gedefinieerd wordt:

Definitie. Zij $\mathfrak{A}$ een cylinder-algebra. Een niet-lege verzameling E van elementen van $\mathfrak{A}$ heet een ideaal indien voldaan is aan de volgende eisen:

1. $x, y \in E \Rightarrow x+y \in E$;
2. $x \in E$ en $y \in A \Rightarrow x.y \in E$;
3. $x \in E \Rightarrow C_i x \in E$, voor alle $i < N$.

Het ideaal E heet niet-triviaal als het een element $\neq 0$ bevat.

De idealen van $\mathfrak{A}$ zijn dus die boole-idealen die gesloten zijn t.o.v. alle C_i. De volgende stelling is bijna triviaal.

Stelling 4.1. Zij $\mathfrak{A}$ een cylinder-algebra, en B een verzameling van elementen van $\mathfrak{A}$. Het kleinste ideaal in $\mathfrak{A}$ dat B bevat bestaat uit alle elementen x, waarvoor eindig veel elementen $y_1, \ldots, y_k \in B$ gevonden kunnen worden, en een eindige indexverzameling a, zodat geldt:

$$x \leq C_a y_1 + \ldots + C_a y_k.$$

Ook is welbekend de bewijsmethode van de volgende

Stelling 4.2. Zij $\mathfrak{A}$ een cylinder-algebra, en y een element $\neq 0$ van $\mathfrak{A}$. Dan bezit $\mathfrak{A}$ een ideaal E, zodanig dat $y \notin E$, terwijl $y \in F$ voor ieder ideaal F dat E echt bevat.

Bewijs: De verzameling van alle idealen van $\mathfrak{A}$ die y niet bevatten is niet leeg, daar $y \notin \{0\}$, en is inductief geordend. Volgens Zorn's lemma heeft deze verzameling dus een maximaal element E.

We hebben ook nog de volgende stelling nodig:

Stelling 4.3. Zij $\mathfrak{A}$ een cylinder-algebra. Dan zijn de volgende twee beweringen equivalent:

(1) Ieder paar niet-triviale idealen van $\mathfrak{A}$ heeft een niet-triviale doorsnede;

(2) Voor ieder paar elementen $x \neq 0$, $y \neq 0$ van $\mathfrak{A}$ is er een eindige verzameling a van indices $< N$ zodanig dat $C_a x . C_a y \neq 0$.

Bewijs: 1. Stel (1) geldt. Neem willekeurige elementen $x, y \neq 0$, en stel E_1, E_2 zijn de idealen die zij voortbrengen. Dan zijn E_1 en E_2 niet triviaal; er is dus een $z \neq 0$ met $z \in E_1 \cap E_2$. Op grond van stelling 4.1 zijn er dan eindige indexverzamelingen a_1 en a_2 zodat $z \leq C_{a_1} x$ en $z \leq C_{a_2} y$. Zij $a = a_1 \cup a_2$. Dan is $C_a x . C_a y \geq z \neq 0$.

2. Stel (2) is juist, laten E_1 en E_2 niet-triviale idealen van $\mathfrak{A}$ zijn. Neem $x \neq 0$ in E_1 en $y \neq 0$ in E_2. Dan is, voor zekere eindige indexverzameling a, $C_a x . C_a y \neq 0$. Maar $C_a x . C_a y \in E_1 \cap E_2$.

5. Een cylinder-algebra $\mathfrak{A}$ heet subdirect oplosbaar als er cylinder-algebra's $\mathfrak{A}_\gamma$ bestaan, geen van alle isomorf met $\mathfrak{A}$, zodanig dat $\mathfrak{A}$ isomorf is met een subdirect product van de $\mathfrak{A}_\gamma$.

N.B. Er zijn voorbeelden bekend van subdirect oplosbare cylinder-algebra's die de volgende eigenschap hebben: als $\mathfrak{A}$ isomorf is met een subdirect product van eindig veel algebra's $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_k$, dan is $\mathfrak{A}$ isomorf met één der algebra's $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$.

HENKIN [4] heeft de volgende stelling bewezen:

Stelling 5.1. Een cylinder-algebra $\mathfrak{A}$ is dan en slechts dan subdirect oplosbaar indien de doorsnede van alle niet-triviale idealen uit 0 alleen bestaat.

Het bewijs van deze stelling valt in verschillende stappen uiteen.

Hulpstelling 5.2. Als $\mathfrak{A}$ subdirect oplosbaar is, dan is de doorsnede van alle niet-triviale idealen $\{0\}$.

Bewijs. Zij $\mathfrak{A}$ isomorf met een subdirect product van algebra's $\mathfrak{A}_\gamma$, die geen van alle met $\mathfrak{A}$ isomorf zijn. Er is voor iedere γ een natuurlijke epimorfie $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_\gamma$, en de kern E_γ is een niet-triviaal ideaal, omdat $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}_\gamma$ niet isomorf zijn. Toch is de doorsnede van alle E_γ $\{0\}$, dus dat geldt zeker ook voor de doorsnede van alle niet-triviale idealen.

Hulpstelling 5.3. Iedere cylinder-algebra $\mathfrak{A}$ is isomorf met een subdirect product van algebra's $\mathfrak{A}_\gamma (\gamma \in \Gamma)$, die elk de eigenschap hebben dat de doorsnede der niet-triviale idealen niet $\{0\}$ is.

Bewijs. Neem $\Gamma = A \setminus \{0\}$, de verzameling der elementen $\neq 0$ van $\mathfrak{A}$. Als $0 \neq y \in A$, zij dan E_y een ideaal van $\mathfrak{A}$, met de eigenschap, dat $y \notin E_y$, terwijl $y \in F$ voor ieder ideaal F dat E_y echt bevat.[*] Zij $\mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}/E_y$. Dan is de restklasse van y een niet-nul element van $\mathfrak{A}_y$, dan in ieder niet-triviaal ideaal van $\mathfrak{A}_y$ is bevat. De doorsnede der niet-triviale idealen van $\mathfrak{A}_y$ is dus niet $\{0\}$.

Verder is $\mathfrak{A}$ isomorf met een subdirect product van alle $\mathfrak{A}_y$, waar $0 \neq y \in A$. Want zij φ de afbeelding van $\mathfrak{A}$ in $\prod_{0 \neq y \in A} \mathfrak{A}_y$, zodanig dat, voor $x \in A$ en $0 \neq y \in A$, $\varphi(x)(y) =$ de restklasse van x modulo E_y. Dan is φ een monomorfie; want als $x \neq 0$, dan is $\varphi x \neq 0$, daar $\varphi x(x) =$ de restklasse van x modulo E_x, $\neq 0$. En $\varphi \mathfrak{A}$ is een subdirect product van de $\mathfrak{A}_y$.

Uit hulpstellingen 5.2 en 5.3 volgt dat iedere cylinder-algebra isomorf is met een subdirect product van subdirect onoplosbare cylinder-algebra's. Bovendien volgt

Hulpstelling 5.4. Als de doorsnede van alle niet-triviale idealen van een cylinder-algebra $\{0\}$ is, dan is $\mathfrak{A}$ subdirect oplosbaar.

Bewijs: Volgens hulpstelling 5.3 is $\mathfrak{A}$ isomorf met een subdirect product van cylinder-algebra's $\mathfrak{A}_\gamma$, die geen van alle met $\mathfrak{A}$ isomorf kunnen zijn, omdat, voor iedere γ, de doorsnede van alle niet-triviale idealen van $\mathfrak{A}_\gamma$ niet $\{0\}$ is, terwijl in $\mathfrak{A}$ de doorsnede van alle niet-triviale idealen volgens het gegeven wel $\{0\}$ is.

---

[*] Zo'n ideaal E_y bestaat op grond van stelling 4.2.

Hulpstellingen 5.2 en 5.4 leveren samen stelling 5.1.

6. In sommige gevallen is het mogelijk om het criterium in stelling 5.1 te versterken. Dit is bijvoorbeeld het geval als $\mathfrak{A}$ tenminste één atoom bezit. (Het begrip atoom is voor cylinder-algebra's gedefinieerd, doordat iedere cylinder-algebra vanzelf ook de structuur van een boole-algebra heeft.)

Stelling 6.1. Zij $\mathfrak{A}$ een cylinder-algebra met tenminste één atoom x_0. Dan geldt, dat $\mathfrak{A}$ dan en slechts dan subdirect oplosbaar is, indien er twee niet-triviale idealen E_1, E_2 van $\mathfrak{A}$ zijn met $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Bewijs: 1. Stel er zijn 2 dergelijke idealen. Dan is de doorsnede van alle niet-triviale idealen van $\mathfrak{A}$ ook $\{0\}$, en dus is $\mathfrak{A}$ subdirect oplosbaar, op grond van stelling 5.1.

2. Neem aan 2 dergelijke idealen bestaan niet; dan is dus de doorsnede van een willekeurig paar niet-triviale idealen weer niet-triviaal. Op grond van stelling 4.3 geldt dan, dat er bij ieder paar elementen $x,y \neq 0$ een eindige indexverzameling a bestaat zodanig dat $C_a x . C_a y \neq 0$.

Zij nu E een willekeurig ideaal van $\mathfrak{A}$. Dan is er een $z \neq 0$ in E. Daar ook het atoom $x_0 \neq 0$ is, is er dus een eindige indexverzameling a zodat $C_a x_0 . C_a z \neq 0$. Op grond van 3.10 is $C_a x_0 . C_a z = C_a(x_0 . C_a z)$, en uit 3.13 volgt dan $x_0 . C_a z \neq 0$. Aangezien x_0 een atoom is, moet $x_0 \leq C_a z$, en daaruit volgt $x_0 \in E$.

Het element $x_0 \neq 0$ is dus in ieder niet-triviaal ideaal van $\mathfrak{A}$. Uit stelling 5.1 volgt dan dat $\mathfrak{A}$ niet subdirect oplosbaar kan zijn. Hiermee is het bewijs van stelling 6.1 voltooid.

Een tweede belangrijke categorie van cylinder-algebra's waarvoor het criterium van stelling 5.1 kan worden verscherpt, is die der locaal eindig-dimensionale cylinder-algebra's. Eerst enige definities.

Definitie. Zij x een element van een N-dimensionale cylinder-algebra $\mathfrak{A}$. De dimensie-verzameling Δx van x is de verzameling van alle $i < N$ waarvoor $C_i x \neq x$.

Definitie. Een cylinder-algebra $\mathfrak{A}$ heet locaal eindig-dimensionaal indien Δx eindig is, voor iedere x in $\mathfrak{A}$.

Er geldt nu ook:

Stelling 6.2. Een locaal eindig-dimensionale cylinder-algebra $\mathfrak{A}$ is dan en slechts dan subdirect oplosbaar, indien er twee niet-triviale idealen E_1, E_2 zijn met $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Bewijs. 1. Stel er zijn twee dergelijke idealen. Dan is zeker de doorsnede van alle niet-triviale idealen gelijk aan $\{0\}$, en uit stelling 5.1 volgt dat $\mathfrak{A}$ subdirect oplosbaar is.

2. Stel $\mathfrak{A}$ is subdirect oplosbaar. Zij $x \neq 0$. Uit stelling 5.1 volgt het bestaan van een niet-triviaal ideaal E met $x \notin E$. Dan is zeker ook $1 \notin E$. Zij $y \neq 0$ in E. Uit $C_{\Delta y}y \in E$ en $1 \notin E$ volgt $C_{\Delta y}y \neq 1$, en dus $-C_{\Delta y}y \neq 0$. Verder is, volgens 3.11, $C_{\Delta y}y \geq y \neq 0$, dus ook $C_{\Delta y}y \neq 0$.

Gebruikmakend van 3.15 en 3.14 volgt ook: $C_a C_{\Delta y} y = C_{a \cup \Delta y} y = C_{\Delta y} y$; $C_a - C_{\Delta y} y = C_a C_{\Delta y} - C_{\Delta y} y = C_{a \cup \Delta y} - C_{\Delta y} y = C_{\Delta y} - C_{\Delta y} y = -C_{\Delta y} y$. Voor iedere eindige indexverzameling a is dus: $C_a C_{\Delta y} y . C_a - C_{\Delta y} y = C_{\Delta y} y . -C_{\Delta y} y = 0$. Maar dan volgt uit stelling 4.3 dat er twee niet-triviale idealen E_1, E_2 zijn met $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Uit stelling 5.3 volgt eenvoudig:

Stelling 6.3. Een locaal eindig-dimensionale cylinder-algebra is dan en slechts dan subdirect *onoplosbaar* indien er voor ieder element $x \neq 0$ een eindige indexverzameling a bestaat met $C_a x = 1$.

Bewijs: De voorwaarde is equivalent met: $C_{\Delta x} x = 1$ voor alle $x \neq 0$. Is hieraan voldaan, dan is er maar één niet-triviaal ideaal, nl. de hele algebra, en de doorsnede van alle niet-triviale idealen is dus niet $\{0\}$. Op grond van stelling 5.1 is dus $\mathfrak{A}$ niet subdirect oplosbaar.

Is aan de voorwaarde niet voldaan voor zekere $y \neq 0$, dan volgt geheel als in het bewijs van stelling 6.2 dat $\mathfrak{A}$ twee niet-triviale idealen E_1, E_2 bezit met $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Op grond van stelling 5.1 is dan $\mathfrak{A}$ subdirect oplosbaar.

Een andere formulering van stelling 5.4 is:

Stelling 6.4. Een locaal eindig-dimensionale cylinder-algebra $\mathfrak{A}$ is dan en slechts dan subdirect onoplosbaar, indien hij enkelvoudig is.

(Een cylinder-algebra heet *enkelvoudig* als $\{0\}$ en de gehele algebra de enige idealen zijn.)

Opmerking. Het is mogelijk dat een cylinder-algebra uitgesproken concreet is, en locaal eindig-dimensionaal, en toch niet enkelvoudig.

Voorbeeld. Zij $\mathfrak{A}$ de uitgesproken concrete algebra van alle deelverzamelingen van $\{0,1\}^{\omega}$, en zij $\mathfrak{B}$ de kleinste deelalgebra van $\mathfrak{A}$ die $\emptyset$, I, alle D_{ij}, en de verzameling X_0 bevat, waar X_0 de verzameling is van alle rijen in I waarin slechts eindig vaak 0 voorkomt. Dan is $\mathfrak{B}$ locaal eindig-dimensionaal; maar voor iedere eindige indexverzameling a is $C_a X_0 = X_0 \neq I$. Uit stelling 6.3 volgt dus dat $\mathfrak{B}$ niet enkelvoudig is (en dus is $\mathfrak{B}$ subdirect oplosbaar).

We kunnen de belangrijkste resultaten als volgt samenvatten:
Stelling 6.5. Zij $\mathfrak{A}$ een cylinder-algebra, die ofwel locaal eindig-dimensionaal is, ofwel tenminste één atoom bevat. Dan zijn de volgende beweringen equivalent:

(1) $\mathfrak{A}$ is subdirect oplosbaar.

(2) De doorsnede van alle niet-triviale idealen van $\mathfrak{A}$ is $\{0\}$.

(3) $\mathfrak{A}$ bezit twee niet-triviale idealen E_1, E_2 met $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

(4) Er zijn twee elementen $x \neq 0$, $y \neq 0$ van $\mathfrak{A}$ zodanig dat $C_a x . C_a y = 0$, voor iedere eindige indexverzameling a.

In het geval dat $\mathfrak{A}$ locaal eindig-dimensionaal is, zijn deze beweringen ook equivalent met elk der beide volgenden:

(5) Er is een $x \neq 0$ in $\mathfrak{A}$ met $C_{\Delta x} x \neq 1$.

(6) $\mathfrak{A}$ is niet enkelvoudig.

Litteratuur:

A.H. COPELAND Sr [1] Note on cylindric algebras and polyadic algebras. Mich.Math.J.3 (1955-1956) 155-157.

Bernard A. GALLER [1] Cylindric and polyadic algebras. Proc.A.M.S. 8 (1957) 176-183.

Paul R. HALMOS [1] Polyadic Boolean algebras. Proc.Nat.Acad. Sci. U.S.A. 40 (1954) 296-301.

——— [2] The basic concepts of algebraic logic. Am. Math.Monthly 63 (1956) 363-387.

——— [3] Algebraic logic, I. Monadic Boolean algebras. Comp.Math.12 (1956) 217-249.

——— [4] Algebraic logic, II. Fund.Math.43 (1956) 255-325.

——— [5] Algebraic logic, III. Trans.A.M.S. 83 (1956) 430-470.

——— [6] Algebraic logic, IV. Trans. A.M.S. 86 (1957) 1-27.

Leon HENKIN [1] The representation theorem for cylindrical algebras. In: Mathematical interpretation of formal systems. Amsterdam, 1955.

[2] La structure algébrique des théories mathématiques. Parijs, 1956.

[3] Cylindrical algebras of dimension 2. Bull. A.M.S. 63 (1957) 26.

[4] Seminar on cylindrical algebras. Berkeley, Springsemester 1958. (Niet gepubliceerd).

Alfred TARSKI [1] A representation theorem for cylindric algebras. Bull. A.M.S. 58 (1952) 65-66.

Alfred TARSKI en F.B. THOMSON [1] Some general properties of cylindric algebras. Bull.A.M.S. 58 (1952) 65.