STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 006

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Dr. C.G.G. van Herk

26 mei 1962

Wiener-spectra en vermoedens over de Zetafunctie van RIEMANN

1962

STICHTING ZW 1962-006
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

door

Dr. C.G.G. van Herk

26 mei 1962

WIENER-spectra en vermoedens over de Zetafunctie van RIEMANN

1. Inleiding

De vermoedens waarop de titel slaat betreffen de verticale verdeling van de niet-triviale nulpunten van $\zeta(s)$ (verder "nulpunten" en "de" zetafunctie genoemd). Het zg. vermoeden van RIEMANN (hier alleen gebruikt terwille van een eenvoudiger formulering van heuristische gezichtspunten) is nu geen doel en zelfs nauwelijks relevant. Het is zeer goed denkbaar dat mijn vermoedens er logisch onafhankelijk van zijn (in die zin dat voor hun bewijs de kennis van het vermoeden van RIEMANN niet nodig is). Aan de andere kant zouden deze uitsluitend kunnen gelden (nl. als het vermoeden van RIEMANN onjuist zou zijn) voor die nulpunten die liggen op de "critieke lijn" $\sigma=\frac{1}{2}$. Mijn numerieke materiaal betreft nl. alleen de eerste 60 nulpunten (alle op de critieke lijn); de meeste "numerieke" vermoedens (dus niet de functietheoretische) werden reeds uit de eerste 18 verkregen.

Het vermoeden van RIEMANN heeft me ook maar matig geïnteresseerd. In de eerste plaats blijft het veel te moeilijk (ondanks het belangrijke resultaat van A. SELBERG [1], dat $N_0(T) > AT \log T$; $N_0(T)$ = aantal nulpunten $\frac{1}{2}+it$ waarvoor $0 < t \leq T$). Nu, twintig jaar na de publicatie van SELBERG is het vermoeden nog steeds niet bewezen, en men mag veilig aannemen dat het verbeteren van de constante A even moeizaam zal gaan als dat met andere

----

1) A. SELBERG, On the zeros of RIEMANN's zeta-function on the critical line, Arch. for Math. og Naturv. B, 45 ('42), p.101-114.

constanten het geval was. Een bewijs van het vermoeden vereist natuurlijk radicaal nieuwe gezichtspunten die uitgaan van algemene functietheoretische principes;er zullen wel nauwelijks formules aan te pas komen.

Maar bovendien levert het vermoeden de meest eenzijdige informatie over de nulpunten die maar denkbaar is Over de horizontale verdeling zegt het alles, over de verticale niets (indirect wel iets). Over de vormenrijkdom en de wanorde (zie beneden) in het verloop van de "signed modulus" Z, bepaald door

$$
\begin{aligned}
Z(t) &\doteq \exp(i\vartheta)\,\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = \pm\left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\right|, \\
\vartheta(t) &\doteq -\tfrac{1}{2}t\log\pi + \arg\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}it),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

leert de simpele formulering "voor $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ is $\zeta(\sigma+it) \neq 0$" in het geheel niets. - Misschien is juist deze beperktheid een bezwaar, en moet er voor een bewijs eerst <u>meer</u> worden verondersteld. Het probleem, de nulpunten expliciet uit te drukken door een functie van een loopgetal lijkt me dan ook veel aantrekkelijker (en dankbaarder). Immers, <u>in combinatie</u> met een expliciete representatie van de imaginaire delen t_h van de nulpunten (ik neem als loopgetal $h = [h] + \frac{1}{2}$ om aan $t_{-h} = -t_h$ te voldoen) verschaft het vermoeden van RIEMANN zó veel informatie, dat $\zeta(s)$ er (op een paar kleinigheden na) eenduidig door wordt bepaald. Iets wat voor het vermoeden alléén niet opgaat.

In elk geval is met het beroemde vermoeden van RIEMANN het einde van de (zinvolle) zeta-problematiek lang niet bereikt. TITCHMARSH schreef hierover zeer terecht: "In most cases we obtain much more precise results with the hypothesis than without it. But even a proof of the RIEMANN hypothesis would not by any means complete the theory. The finer shades in the behaviour of $\zeta(s)$ would still not be completely determined." [2)]

Mijn belangstelling voor de zetafunctie hing dan ook met geheel andere dingen samen als met de priemgetallentheorie (hoe interessant op zichzelf) en wat daaraan annex is; het uitgangspunt betrof de wanorde in de Natuur, en de theorie van WIENER die enig licht op dit zo

----

2) E.C. TITCHMARSH, The Theory of the Riemann Zeta-function, 1951, p.282.

mysterieuse begrip wanorde scheen te werpen.

2. Het spectrum van een functie

Zoals bekend voeren talrijke natuurkundige vragen (natuurkundig $\doteq$ natuurwetenschappelijk, wat ook biologische vragen insluit) op het probleem van de trigonometrische analyse van een bekend verondersteld (en bijna altijd continue) functie f(x). Hier is het voldoende f integrabel en in ieder eindig interval van beperkte schommeling te nemen, en x willekeurig reëel. Voorlopig wordt verondersteld dat f voor iedere x door een (bepaalde) som van eindig of aftelbaar veel sinusoïden voorstelbaar is. Iedere sinusoïde wordt door frequentie, amplitude en fase gekenmerkt, en de vraag is nu hoe deze 3 parameters voor elke component afzonderlijk te bepalen. - Dit is het probleem van de harmonic analysis (naar BURKHARDT opgeeft een naam, omstreeks 1860 in Engeland ontstaan); voor niet-periodieke f is de term generalized harmonic analysis, (ook?) door WIENER gebruikt, uiteraard juister.

Het probleem is een beetje heterogeen en past niet erg goed in de logisch gegroeide hoofdstukken van de Analyse; het wordt dan ook aanstonds iets anders en scherper gesteld. Het lijkt nuttig er eerst verschillende gevallen van te onderscheiden; daarbij volg ik de indeling van BURKHARDT in zijn voortreffelijke Encyclopedieartikel [3].

(a) Het geval van een zuiver periodieke f voert op de FOURIER-analyse: alle frequenties zijn gehele veelvouden van een bekende grondfrequentie, die direct uit de kleinste periode van f volgt; de enige vraag die bij empirische f overblijft is, hoe een integraal, die f als factor in de integrand bevat, numeriek het best te berekenen.

(b) Is f niet zuiver periodiek, maar zijn de frequenties u bekend (zoals in de theorie van de getijden) dan volgen amplituden en fases van een component A sin(ux+a) uit

$$(2)\qquad M\left\{f(x)\sin ux\right\} = \tfrac{1}{2}A\cos a,\qquad M\left\{f(x)\cos ux\right\} = \tfrac{1}{2}A\sin a,$$

waarbij

$$(3)\qquad M(f) \doteq \lim_{X\to\infty}\frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,dx$$

voor alle f, waarvoor deze grenswaarde bestaat. Bij een absoluut con-

---

3) H. BURKHARDT, Trigonometrische Interpolation, Enz.d.Math.Wiss., Analysis, II, 1,1, p.642-693 (1904).

vergente trigonometrische reeks voor f is (2) zonder meer correct.

Het verschil met de FOURIER-analyse (die een speciaal geval is van (b)) bestaat hierin dat nu geen gemiddelden worden genomen over een grondperiode (die er niet is), maar over een halve (of volle) rechte.

(c) Blijft het geval waarbij ook de frequenties in de ontwikkeling van f onbekend zijn. Dit probleem van de "opsporing van verborgen perioden" is van geheel andere aard als de onder (a) en (b) genoemde, en vereist ook geheel andere hulpmiddelen.

Toch is het vraagstuk aldus niet op de gunstigste wijze geformuleerd, want het is beter uit te gaan van bekende (functietheoretische) eigenschappen van f dan van een hypothetische reeksontwikkeling. Dit is door WIENER gedaan, en zijn methode levert (als f ontwikkelbaar is in een reeks, dus de componenten discrete frequenties hebben) frequenties en amplitudes tegelijk. Maar tegelijk laat de spectrumdefinitie van WIENER ruimte voor andere mogelijkheden, voor functies f met continue spectra (die dus niet door een trigonometrische reeks zijn voor te stellen, maar een integraal vereisen), die echter (voor zo ver mij bekend) nog nauwelijks zijn onderzocht.

In een van zijn eerste publicaties [4] over dit onderwerp heeft WIENER zijn grondgedachte als volgt geformuleerd: "If we consider t as a time, and f(t) as the displacement of a particle at time t, as in sound vibration, the notion defined by f(t) will have a certain spectrum. Now, in light spectra, as given by a prism or grating, and in the analogous sound spectra, amplitude and frequency play a definite rôle, but phase is neglected. A spectrum, indeed, is determined by a distribution of amplitude in frequency. It is thus a matter of some interest to find a mathematical expression depending on f, which shall determine the frequencies and amplitudes of the components of f, and shall be determined by them, without any reference to their phases."

Het "witte licht" (men zou nu vermoedelijk van "ruis" spreken) is voor WIENER een groot probleem geweest, hij komt er telkens op

---

4) N. WIENER, The spectrum of an arbitrary function, P.L.M.S. (2), 27, '28, p. 483-496.
Zie ook de literatuurlijst in The FOURIER Integral ('33) (verder als F.I. geciteerd) van dezelfde auteur.

terug. Het spectrumbegrip uit de Natuurkunde wilde hij wiskundig preciseren (F.I. p.163). Toch ben ik er lang niet zeker van of de overeenkomst van dit fysische begrip met WIENER's (natuurlijk exact gedefinieerde) notie van het spectrum van een functie groot genoeg is, om dit eerste met behulp van het laatste te kunnen interpreteren. Een punt van verschil is dat natuurkundige spectra op zeker moment waarneembaar zijn, terwijl de wiskundige spectrumdefinities kennis van het trillingsverloop vereisen tot in het oneindige. Overigens is dit een theoretisch-fysische kwestie die hier verder terzijde kan blijven.

De aangeduide moeilijkheid zit vooral in de continue spectra. Wij zijn gewend oscillaties zeer in het algemeen te zien als superposities van sinusoïden. Laat, ter precisering, onder een oscillerende functie f een functie worden verstaan waarvoor de gemiddelden $M(f^2)$ en $M(f'^2)$ bestaan en eindig en positief zijn. Is $\varphi(u)$ nu L-integreerbaar over $(0,\infty)$ dan zou

$$(4) \qquad f(x) \doteq \int_0^\infty e^{iux}\varphi(u)\,du$$

volgens het superpositieprincipe een "trillingsmengsel" voorstellen met de spectrale dichtheid φ. Op zichzelf is er tegen deze gangbare formulering geen bezwaar.[5] Alleen het ietwat paradoxale is dat f dan geen oscillerende functie is in de zojuist vastgelegde zin. Immers $f(x) \to 0$ voor $x \to \infty$, zodat ook $M(f^2) = 0$. De aan f beantwoordende trilling dooft voor $x \to \infty$ uit. Dit kan de indruk wekken dat het superpositieprincipe weinig aan de fysische werkelijkheid beantwoord; inderdaad moeten "oscillerende"functies op andere wijze als door (4) worden voorgesteld. Men zou

1) als componenten van f geen sinusfuncties kunnen nemen, maar functies $\exp(-ax^2+ibx)$ of iets dergelijks, wat beter bij de aard van het licht zou aansluiten: men krijgt een superpositie van "golfpakketten";

2) de uitdrukking (4) kunnen vervangen door

$$(5) \qquad f(x) \doteq \int_0^\infty e^{iux}\,d\psi(u),$$

---

5) Zie b.v. COURANT-HILBERT, Methoden d.Math. Physik I (1e druk '24), p.89; M. BORN, Optik ('33) p.20.

waarbij ψ niet van beperkte schommeling is (en i.h.a. niet-differentieerbaar); is ψ in een interval (a,b) differentieerbaar dan zou dit interval slechts een bijdrage, die asymptotisch nul is, leveren; WIENER heeft de uitdrukking (5) al overwogen, maar is voor de convergentiemoeilijkheden teruggeschrokken (misschien ten onrechte); overigens hoeven de beide genoemde mogelijkheden elkaar niet uit te sluiten.

In elk geval waren de natuurkundigen, al lang vóór de quantentheörie,van de in (4) besloten moeilijkheid op de hoogte. Vrij zeker heeft deze ook WIENER tot een geheel andere (en meer adequate) spectrumdefinitie gebracht. WIENER [6] schrijft hierover, na de desbetreffende onderzoekingen van GOUY en Lord RAYLEIGH te hebben genoemd: "In both cases one is astonished by the skill with which the authorsuse clumsy and unsuitable tools to obtain the right results, and one is led to admire the unfailing heuristic insight of the true physicist. - The net outcome of the work of these writers was to dispel the idea that white light consist in some physical, supermathematical way of homogeneous monochromatic vibrations. SCHUSTER in particular, was led to the conclusion that when white light is analyzed by a grating, the monochromatic components are created by the grating rather than selected by it."

WIENER definieert het spectrum $\sigma(u|f)$ van een complexe, integrabele (dus i.h.a. niet-analytische) functie f van een <u>reële</u> variabele, waarvoor de <u>autocorrelatiefunctie</u>

(6) $$\Phi(x|f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,\bar{f}(x+t)\,dt$$

voor alle reële x bestaat, door

(7) $$\sigma(u|f) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\{\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\left(\int_1^A + \int_{-A}^{-1}\right)\frac{\Phi(x)e^{-iux}}{-ix}\,dx + \int_{-1}^{1}\Phi(x)\,\frac{e^{-iux}-1}{-ix}\,dx\right\}.$$

De existentie van σ volgt uit de stelling van PLANCHEREL; σ is reëel en bij passende normering monotoon; hier wordt steeds gesteld

(8) $$\sigma(u) = \tfrac{1}{2}\left\{\sigma(u+) + \sigma(u-)\right\}, \quad \sigma(0)=0.$$

----

6) N. WIENER, Generalized Harmonic Analysis, Acta Math.55 ('30), p. 117-258 (speciaal p.127).

Voor een trigonometrisch polynoom

(9) $$f(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{i\lambda_j x}$$

is σ een trapfunctie die voor $u = \lambda_j$ een sprong $\sqrt{2\pi}\,|A_j|^2$ maakt. WIENER vergeleek daarom $\sigma(u|f)$ met de trillingsenergie die door de frequenties $\lambda_j \leqslant u$ wordt bijgedragen (hij zag af van de factor λ_j^2 in de energieformule); vandaar voor $\sigma(u)$ de term power-spectrum (mede op grond van deze analogie zou ik σ liever anders willen normeren, nl. een factor $2^{-1}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ willen toevoegen).

Met gebruikmaking van (8) heeft men

(10) $$\sigma(u \mid f) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x|f) \frac{e^{-iux}-1}{-ix} dx,$$

d.w.z. dat het spectrum practisch de FOURIER-getransformeerde is van $x^{-1}\,\Phi(x|f)$. Dit laatste gaat steeds op, als f reëel wordt genomen (wat geen beperking van de algemeenheid betekent) en $f(x)=o\ (\forall x)$(wat nauwelijks een beperking inhoudt). Dan is nl. $\Phi(x)$ even, en gaat (10) over in

(10.1) $$\sigma(u \mid f) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x\ f) x^{-1} \sin ux\, dx.$$

Het spectrum is een asymptotische eigenschap van f (de autocorrelatiefunctie wordt door de asymptotische eigenschappen van f bepaald). Voor begrensde $|x|$ kan men f willekeurig wijzigen, voor willekeurige x kan men een voldoend kleine functie aan f toevoegen zonder dat het spectrum verandert. Dit punt zal straks de aanleiding zijn voor een merkwaardig vermoeden over de zetafunctie. Overigens is dit slechts één geval waaruit het informatieverlies bij de transformatie $f(x) \rightarrow \sigma(u)$ blijkt.

Hier is een voorbeeld van een continu spectrum dat niet identiek verdwijnt (F.I. p.151). Beschouw de echte duaalbreuk $a=0,a_1a_2a_3\ldots$ en stel

(11) $$f(x) = \begin{cases} 2a_{2n+1}-1 & \text{voor } n < x \leqslant n+1, \\ 2a_{2n}-1 & \text{"} \quad -n < x \leqslant 1-n. \end{cases}$$

Dan is voor bijna alle a $(0 < a < 1)$

$$\Phi(x|f) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{voor } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{"} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

waaruit

$$\sigma(u \mid f) = 2 \int_0^u \frac{1-\cos v}{v^2}\, dv. \tag{12}$$

Dit is een almost-all voorbeeld dat discontinue functies betreft; een voorbeeld van een analytische functie met continu spectrum heeft WIENER (voor zover mij bekend) niet gegeven. Mogelijk heeft hij daar ook niet naar gezocht: later schijnt WIENER zich vooral met de statistische uitwerking van het spectrumbegrip te hebben bezig gehouden. "Wanorde" schijnt nl. een essentiële voorwaarde voor het optreden van continue spectra te zijn ((11) illustreert dit al). De bijna-periodieke functies zijn niet wanordelijk, maar hebben discrete spectra. De random functions van PALEY en WIENER [7] zijn wanordelijk, maar weer niet analytisch. Met behulp van de zetafunctie (voor $\sigma = \frac{1}{2}$, voor $\sigma > \frac{1}{2}$ is $\zeta(s)$ op een rechte σ = constant bijnaperiodiek, voor $\sigma < \frac{1}{2}$ laat $\zeta(s)$ zich in $\zeta(1-s)$ uitdrukken: men komt voor een voorbeeld dus noodzakelijk op de critieke lijn terecht) laat zich een analytisch voorbeeld met continu spectrum construeren.

ATKINSON [8] bewees nl. dat voor $\vartheta(t') - \vartheta(t) = \alpha$ (waarbij α constant en $\vartheta(t)$ door (1) bepaald) geldt

$$\int_1^T Z(t)\, Z(t')\,dt \sim \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, T \log T, \qquad T \to \infty. \tag{13}$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat de functie gedefinieerd door

$$x \doteq \tfrac{1}{2} t \log t, \quad f(x) \doteq (\log t)^{-\frac{1}{2}}\, Z(t) \tag{14}$$

de autocorrelatiefunctie $\Phi = x^{-1} \sin x$ bezit, wat (met een ietwat andere normering als die van WIENER) voert tot het spectrum

----

7) R. PALEY en N. WIENER, FOURIER Transforms in the complex Domain, '34, hoofdstuk IX.

8) F.V. ATKINSON, A mean value property of the RIEMANN zeta-function, J.L.M.S. 23 ('48), p.128-135.

$$\sigma(u \mid f) = \begin{cases} u & \text{voor } 0 \leq u \leq 1, \\ 1 & \text{"} \quad u > 1. \end{cases} \tag{15}$$

ATKINSON schijnt dit niet bemerkt te hebben. Zelf had ik dit voorbeeld (gebaseerd op een enigszins andere spectrumdefinitie, die van de autocorrelatiefunctie geen gebruik maakt) in 1940 aan Prof.v.d. CORPUT meegedeeld.

Hoewel met (14) een analytische functie met continu spectrum was verkregen bleek het (door grote onkunde aangaande $\zeta(s)$) niet mogelijk hiermee verdere vermoedens over de rol van continue spectra te toetsen (b.v. de geldigheid van een integraalvoorstelling (5) niet). Ook WIENER zelf "doet" met zijn spectrum niets, men krijgt de indruk dat kennis van de spectrale "energieverdeling" voor hem een eindresultaat is en geen middel tot verder inzicht (gevolg van zijn statistisch gerichte zienswijze?)

Toch is het voorbeeld (14), zij het alleen indirect, op andere wijze wel vruchtbaar geworden. Het prikkelde tot verder onderzoek van $\zeta(s)$ zelf, doordat het de betekenis van een bepaalde transformatie

$$t \rightarrow x(t) \sim \tfrac{1}{2} t \log t \sim \pi N(t) \tag{16}$$

liet zien ($N(T) \doteq$ aantal nulpunten waarvoor $0 < t \leq T$). Door het invoeren van de nieuwe variabele $x(t)$ scheen $Z(t)$ in een eenvoudiger functie over te gaan (f heeft een bizonder eenvoudig spectrum, terwijl Z in het geheel geen spectrum heeft), en numeriek onderzoek heeft deze zienswijze alleen maar bevestigd. De regelmatigheden die werden gevonden betroffen niet de nulpunten t_h van $Z(t)$, maar de getransformeerde nulpunten $x_h = x(t_h)$ van $f(x)$. Overigens is het duidelijk dat zulke regelmatigheden nooit alle functies met het spectrum (15) kunnen betreffen, maar slechts één bepaalde functie onder de ∞ vele asymptotisch equivalente f.

3. Een andere spectrum-definitie

Na WIENER, maar onafhankelijk van hem (want onbekend met zijn werk) heb ik een enigszins andere (in wezen natuurlijk dezelfde) spectrum-definitie gegeven, alleen voor een beperkte klasse van functies. Mijn functies f zijn (a) willekeurig vaak differentieerbaar op een halve rechte (dus niet noodzakelijk holomorf), voldoen (b) aan $f^{(k)}(x)=o(\sqrt{x})$ voor k=0,1,2,... als $x \to \infty$, (c) de gemiddelden $c_r=M\left\{ f^{(r)^2} \right\}$ bestaan voor r=0,1,2,... . Hierover is niets gepubliceerd (evenmin als over de zetafunctie), het is bij een voordracht voor het W.G. (ongeveer '33) gebleven.

Deze definitie was het resultaat van een poging, een methode van LANGRANGE [9] voor het opsporen van verborgen perioden, en daterend van 1772, streng te maken. In het algemeen wordt het vraagstuk, de discrete perioden in een gegeven functie f te bepalen, opgelost (voor zover dit niet met de zg. periodogramanalyse geschiedt) door eerst op f een (meestal lineaire) operator L toe te passen (dit kan b.v. een LAPLACE-transformatie zijn [10]), en vervolgens L(f) te approximeren door algebraïsche uitdrukkingen die, gelijk 0 gesteld, benaderingen van de gezochte frequenties leveren; zulke uitdrukkingen worden verkregen door L(f) b.v. in een reeks of kettingbreuk te ontwikkelen en deze ergens af te breken. Men "algebraïseert" dus het probleem.

Bij de methode van LAGRANGE wordt L(f) in een kettingbreuk ontwikkeld; de benaderingen van de gezochte frequenties laten zich berekenen uit de nulpunten van de noemers van de naderende breuken. Een moeilijkheid is dat deze nulpunten meervoudig of complex kunnen zijn (een soortgelijk bezwaar is tegen de zo veel modernere methode van F. BERNSTEIN in te brengen; het is me niet bekend of dit ooit is ondervangen). Men kan hieraan tegemoet komen door de methode zó te wijzigen, dat de kettingbreukontwikkeling van L(f) een z.g. kettingbreuk van STIELTJES wordt.

De nulpunten van de naderende noemers zijn dan enkelvoudig en negatief, en hieruit volgen positieve, enkelvoudige benaderde waarden voor de frequenties, zoals behoort. De frequenties zelf kunnen natuurlijk overal dicht liggen. Verder leveren de residuen van de naderende breuken benaderingen voor de onbekende amplituden.

Dit alles komt geheel overeen met de methode van WIENER, en in wezen is het ook niets anders. Men moet nl. de methode van LAGRANGE wel heel grondig wijzigen om de genoemde verbetering te verkrijgen;

---

9) BURKHARDT, l.c. p.675; J.L. LAGRANGE, Oeuvres 6, p.505; 7, p.548.
10) F. BERNSTEIN, Zf. f. Angew. Math.u. Mech. '27.

zo wordt L(f) geen lineaire operator (als bij LAGRANGE), maar een quadratische (als bij WIENER). Een en ander laat zich als volgt samenvatten.

Stelling. Laat f aan de hierboven onder (a), (b) en (c) genoemde voorwaarden voldoen. Dan zijn de gemiddelden c_r momenten van STIELTJES, d.w.z.

(17) $$c_r = \int_0^\infty u^r d\sigma(u), \qquad r=0,1,2,\ldots,$$

met niet-afnemende begrensde $\sigma(u)$. Is bovendien de reeks

(18) $$F(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r}{(2r)!} c_r x^{2r}$$

voor een waarde $x > 0$ convergent, dan is het momentenprobleem bepaald (d.w.z. σ eenduidig) en geldt

(19) $$\Phi(y|f) = F(y), \qquad |y| < x;$$

de autocorrelatiefunctie bestaat dan voor $|y| < x$ en is even. Is Φ ook nog holomorf voor $x > 0$ dan is σ met het spectrum van WIENER identiek.

De voorwaarde (b) dient alleen om de relatie

(20) $$M\left\{f^{(p)} f^{(q)}\right\} = -M\left\{f^{(p+1)} f^{(q-1)}\right\}$$

te waarborgen, welke nodig is voor het bewijs van (17). Door middel van het kenmerk

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{c_n}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty$$

van M. RIESZ laat zich de bepaaldheid van het momentenprobleem onder de opgegeven voorwaarden bewijzen.

De hier gegeven methode heeft een klein voordeel boven die van WIENER, als men in het zeta-voorbeeld termen van hogere orde (die niet van invloed zijn op het spectrum) berekenen wil; de autocorrelatiefunctie heeft altijd het bezwaar, met een extra continue parameter belast te zijn.

4. Transformatie van de kritieke lijn

Er is opgemerkt dat er onder de functies, door (16) bepaald, één moest zijn van bizonder eenvoudig gedrag (eenvoudig betrekkelijk). Dit kon reeds worden vermoed zonder de later gevonden regelmatigheden van de nulpunten te kennen (en is dat trouwens ook): het frappant eenvoudige spectrum van een (schijnbaar) zeer ingewikkelde functie leidde daar vanzelf toe. Het was ook intuïtief duidelijk waarom $Z(t)$ voor een periodenonderzoek ongeschikt was: hiervan verwacht men alleen succes bij een eindige, van nul verschillende nulpuntendichtheid, welke in het geval van Z voor $t \to \infty$ echter onbepaald toeneemt. Dit maakte een transformatie van de kritieke lijn noodzakelijk.

Door $x(t) \sim \pi N(t)$ te nemen, volgens (16), wordt nu een positieve gemiddelde afstand

$$M(x_{h+1} - x_h) = \pi \tag{21}$$

verkregen. Doordat f (evenals Z) even is ($x(t)$ moet oneven zijn) liggen de getransformeerde nulpunten x_h i.h.a. in de buurt van de overeenkomstige nulpunten πh van $\cos x$. Men zal dus stellen

$$x_h = \pi h + \xi_h, \tag{22}$$

waarbij πh het seculaire, ξ_h het oscillerende bestanddeel is van x_h. Voor een eerste berekening van de grootheden ξ_h diende de formule

$$x(t) = \tfrac{1}{4} t \log(1+4t^2) - \tfrac{1}{2}(1+\log 4\pi) t + \tfrac{7}{4} \operatorname{arctg} 2t; \tag{23}$$

$x(t)$ is hier oneven en holomorf voor reële t (de singulariteiten van deze functie bij $\pm\frac{1}{2}i$ kunnen misschien beter bij $\pm 2\pi i$ worden gelegd, dit is nog niet onderzocht).

Nu zijn er oneindig veel transformaties $t \to x(t)$ met (16) verenigbaar, en de kans dat (23) de juiste levert is dus nul. De volgens (23) berekende waarden x_h en ξ_h zijn dus met een transformatiefout behept; omdat (23) asymptotisch correct is zal deze fout voor grote waarden van h i.h.a. kleiner zijn dan voor kleine. Bij de gevonden regelmatigheden in het nulpuntenverloop kwam deze "initiële" transformatiefout ook duidelijk aan het licht.

Het probleem de "juiste"functie f(x) exact te bepalen is niet eenvoudig. In de formule

$$(14') \qquad f(x) \doteq g(t)\, Z(t), \qquad g(t) \sim (\log t)^{-\frac{1}{2}}$$

steken twee onbekende functies: x(t) en de factor g(t), welke laatste men zich voor reële t nulpuntenvrij mag denken. Maar door zich voorlopig tot x(t) te bepalen, door zich tot het onderzoek van nulpunten te beperken, kan men de moeilijkheden scheiden.

Functietheoretisch is het effect van de transformatie op Z(t) natuurlijk hoogst gecompliceerd. Maar f bevat in elk geval een kanonieke factor

$$(24) \qquad \omega(x) = \prod_{h>0} \left(1 - \frac{x^2}{x_h^2}\right),$$

en het quotiënt f/ω kan men met g tot één, voorlopig niet te ontcijferen functie verenigen. Men kan vermoeden dat de (kennelijke) eenvoud van de (altijd nog hypothetische) functie ω hierin ligt, dat $\zeta(s)$ van het maximaaltype van de orde 1 is, en $\omega(x)$ slechts van het normaaltype. Maar ik ben niet in staat dit stellig nuttige gezichtspunt in mijn beschouwingen te effectueren.

Vermoedelijk bestaat er een grote overeenkomst tussen $\omega(x)$ en cos x, en begint de reeks van TAYLOR van ω met

$$(25) \qquad \omega(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots .$$

Dit levert een middel de transformatiefout van $\zeta_{\frac{1}{2}}$ te schatten; de uit (23) verkregen waarde $\zeta_{\frac{1}{2}} = -0{,}216\dots$ werd (door de Hr. KLEIN in '52) gewijzigd in de (stellig veel betere) waarde $\zeta_{\frac{1}{2}} = -0{,}052\dots$. De minst onbetrouwbare (na diverse correcties verkregen) waarde was $\zeta_{\frac{1}{2}}=-0{,}06383\dots$, en de enige theoretische waarde, die me aannemelijk leek

$$(26) \qquad \zeta_{\frac{1}{2}} = -\pi/48 = -0{,}06554\dots,$$

wat een relatieve fout van iets minder dan 1/40 zou betekenen.

Aannemend dat ook (26) nog juist is, kan ik vrijwel al mijn voorstellingen over de verticale verdeling van de nulpunten samenvatten in het

Vermoeden

Er is een oneven, voor reële t holomorfe functie

(27) $$x(t) = \pi N(t) + O\left\{(\log t)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right\},$$

en een even, voor reële t holomorfe en positieve functie $g(t) \sim \log t)^{-\frac{1}{2}}$, zodanig dat

(28) $$g(t)\ Z(t) = \omega(x) = \prod\lfloor h > 0 \rfloor \left(1 - \frac{x^2}{x_h^2}\right).$$

Hierbij is

(29) $$x_h = \pi h \left\{1 + \frac{1}{24} \sum_{j=0}^{h/2} e_{m,j}\, d_j\right\}, \qquad h = [h] + \tfrac{1}{2} = m + \tfrac{1}{2},$$

waarbij de gehele getallen $e_{m,j}$ voortgebracht worden door

(30) $$\sum_{m=0}^{\infty} e_{m,j}\, z^m = (1-z^{-1})(z+1+z^{-1})^{-2j-1}, \qquad |z| < 1,\ j \geq 0,$$

en de grootheden d_j voldoen aan

(31) $$d_0 = 1, \quad d_j = \int_0^1 t^j \varphi(t)\,dt, \qquad d_j \text{ rationaal}, \qquad j \geq 0,$$

waarbij

(32) $\varphi(0)=0$, $\varphi(t) \geq 0$, nergens differentieerbaar, $\mathrm{Lip}(\varphi)=\frac{1}{2}$.

De numerieke berekening van de grootheden $e_{m,j}$ gaat het eenvoudigst met de betrekkingen

(33) $$\begin{cases} e_{m,j} = 0, \quad (0 \leq m < 2j); \quad e_{2j,j} = -1, \quad (j \geq 0); \quad e_{1,0} = 2; \quad e_{3,1} = 4; \\ e_{m,0} + e_{m+1,0} + e_{m+2,0} = 0, \quad (m \geq 0); \\ e_{m,j} + 2e_{m+1,j} + 3e_{m+2,j} + 2e_{m+3,j} + e_{m+4,j} = e_{m+2,j-1} \end{cases}$$

$(m \geq 0,\ j \geq 1)$.

Het vermoeden betreft dus niet zo zeer ζ zelf, als wel de mogelijkheid van een scherp bepaalde, vereenvoudigende transformatie $\zeta \to \omega$.

Het is me niet gelukt (behalve voor d_o) voor de HAUSDORFF-momenten d_j uit (29) een schatting te krijgen die bruikbaar leek voor een numerieke conjectuur. Reeds het vermoeden $d_o=1$ is al behoorlijk zwak. Voor kleine j is de initiële transformatiefout in de benodigde waarden ζ_h te groot; voor grotere j moet men rekening houden met mogelijke grotere noemers in d_j, en is de bereikte precisie, die voor het bepalen van d_2 of d_3 misschien voldoende zou zijn, toch weer ontoereikend. Ook met behulp van de bekende momentongelijkheden is het me niet gelukt, deze moeilijkheden te overwinnen (waarmee geenszins gezegd wil zijn dat dit niet kan).