STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1964-006

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

B. van Rootselaar

25 maart 1964

# Quantorenflats of quantorentorens

SMC
1964

ZW 1964-006

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

25 maart 1964

# Quantorenflats of quantorentorens

B. van Rootselaar.

Quantoren zijn uitdrukkingsmiddelen welke men bezigt voor uitspraken betreffende objecten en daarvoor gedefinieerde eigenschappen predicaten en relaties. Dergelijke uitspraken komen reeds in de zogenaamde elementaire wiskunde voor, waaruit men kan opmaken dat het gebruik van quantoren als uitdrukkingsmiddel ook in de elementaire wiskunde zijn nut kan hebben. We zullen ons voorlopig beperken tot getallen en hun eigenschappen.

Men kent twee soorten quantoren:
de existentiele quantor, welke gebruikt wordt om uit te drukken de uitspraak: er is een getal met zekere eigenschap: $(Ex)A(x)$.
de generaliserende quantor, welke gebruikt wordt om uit te drukken, de uitspraak: alle getallen hebben zekere eigenschap: $(x)A(x)$.

Met betrekking tot het gebruik van deze uitdrukkingsmiddelen is het goed zich bewust te zijn van de volgende inzichten:
als men bewezen heeft dat $(x)A(x)$ geldt, dan kan men concluderen dat $A(a)$ geldt, d.w.z. een willekeurig getal a heeft de eigenschap A,

verder als men voor een zeker getal a heeft vastgesteld, dat het de eigenschap A heeft, m.a.w. dat A(a) geldt, dan geldt ook (Ex)A(x). Ook van het onderlinge verband tussen de uitspraken (x)A(x) en (Ex)A(x) maakt men bij wiskundige redenering veelvuldig gebruik. Om dit verband tot uitdrukking te brengen moeten we aan elke eigenschap A toevoegen de eigenschap $\neg A$, vastgelegd door de afspraak $\neg A(x)$ geldt, d.w.z. x heeft de eigenschap $\neg A$ als A(x) niet geldt, d.w.z. als x de eigenschap A niet heeft.
Het bedoelde verband is dan

$\neg(Ex)A(x)$ gelijkwaardig met $(x)\neg A(x)$

en $\neg(x)A(x)$ gelijkwaardig met $(Ex)\neg A(x)$.

Beschouwen we nu de eigenschap van het getallen-drietal x,a,b:

$$P(x,a,b) \equiv x^2+2ax+b > 0.$$

Met deze eigenschap kunnen we een aantal uitspraken verbinden, b.v.

$$(a)(b)(x)\ P(x,a,b)$$

$$(Ea)(Eb)(x)P(x,a,b)$$

enz. in het algemeen geschiedt deze uitspraak-vorming door voorvoegen van drie quantoren in willekeurige volgorde, met keuze uit de generaliserende en existentiele quantor.

Nadat men op deze wijze een uitspraak gevormd heeft, kan men zijn nieuwsgierigheid bevredigen door te onderzoeken of de zo gevormde uitspraak waar is of niet.
Merk op, dat men uit P(x,a,b) ook wel uitspraken kan vormen met minder quantoren, door voor enige van de x,a,b (of alle) zekere getallen in te vullen b.v.

P(1,-1,1) (deze uitspraak is niet waar). maar ook (x)P(x,1,2) (deze uitspraak is waar), enz.

Komt in een dergelijke uitspraak een lang rijtje van quantoren voor dan kunnen we gevoegelijk spreken van een quantorentoren. In het algemeen kan men zeggen dat uitspraken met quantorentorens moeilijk te overzien zijn.

Om een beter overzicht te krijgen over uitspraken met quantorentorens, kan men trachten het aantal quantoren te verminderen. Men kan dat doen door nieuwe relaties te introduceren, b.v. zo:

zij $Q(a,b) \equiv (x)P(x,a,b)$ en $R(a) \equiv (Eb)Q(a,b)$

dan is $(Ea)(Eb)(x)P(a,b) \equiv (Ea)R(a)$.

We hebben bij dit proces van successievelijk definieren van de nieuwe predicaten $Q(a,b)$ en $R(a)$ nu wel een reductie naar de vorm gekregen, doch van een wezenlijke reductie is nog geen sprake.

Van een echte reductie kunnen we pas spreken indien het ingevoerde predicaat $Q(a,b)$ b.v. van dezelfde vorm is als het predicaat $P(x,a,b)$, d.w.z. in ons geval, als $Q(a,b)$ weer een zeker 2$^e$ graads polynoom-ongelijkheid is in de letters a en b. In dat geval is er inderdaad een quantor geëlimineerd.

Zoals bekend is $Q(a,b)$ inderdaad equivalent men een dergelijke ongelijkheid, n.l.

$$Q(a,b) \longleftrightarrow a^2-b < 0$$

en de uitspraak

$$(Ea)(Eb)(x)P(x,a,b) \text{ reduceert op } (Ea)(Eb)(a^2-b < 0).$$

Hoewel we nu niet direct behoeven te zeggen dat de in deze uitspraak voorkomende rij quantoren geen toren meer is, is zij toch eenvoudig te overzien.

In het bovenstaande hebben we gezien, dat overgaan op de discriminant van een quadratische vorm ons een middel geeft om quantoren te elimineren, daarbij een predicaat introducerend dat tot dezelfde klasse (nader te omschrijven) behoort als P.

Ik wil niet nalaten op te merken, dat men zich in het algemeen niet tevreden stelt met de vraag of een van de genoemde uitspraken waar is, maar dat men meestal vraagt naar alle getallen waarvoor zo'n uitspraak waar is.

Ter beantwoording beschouwt men bij elk predicaat A de verzameling van getallen op welke het predicaat van toepassing is en geeft deze verzameling als volgt aan

$\{x;A(x)\}$

(lees: de verz. getallen x waarvoor $A(x)$ geldt).
Analoog voor relaties, bv. $\{(a,b);\ Q(a,b)\}$. Overigens komt men bij gebruik van dit symbool wel in taalkundige moeilijkheden, bv. als men vraagt: bepaal $\{x;A(x)\}$. Men behoeft dan niets te doen, want deze verzameling is reeds bepaald. Men bedoelt dan deze verzameling te beschrijven met zekere standaarduitdrukkingen.
Als we nu in ons voorbeeld verzamelingen gaan beschouwen, dan hebben we dus

$$\{(a,b);\ Q(a,b)\} = \{(a,b);\ a^2-b<0\}.$$

Indien we ons deze verzameling in het vlak aanschouwelijk voorstellen, hebben we onmiddellijk een overzicht over de volgende verzamelingen:

$$\{a;(Eb)(x)P(x,a,b)\},\{a;(b)(x)P(x,a,b)\},$$

$$\{b;(Ea)(x)P(x,a,b)\},\{b;(a)(x)P(x,a,b)\}.$$

Een overzicht van deze verzamelingen geeft ons tegelijk een inzicht in de geldigheid van uitspraken van de vorm $(\pm a)(\pm b)(x)P(x,a,b)$ *) op grond van $\{x;A(x)\}=$ lege verz. $\longleftrightarrow \neg(Ex)A(x)$, en duaal.
Een reductie van uitspraken als boven beschreven is in zekere zin uniek en houdt verband met het feit, dat quadratische vormen 'berekenbare' uiterste waarden hebben.
Het lijkt me nuttig deze bizondere positie van de quadratische vormen te doen uitkomen. Een goed besef daarvan kan helpen de studie van quadratische vormen binnen de perken te houden.

Dat de vraag naar reduceerbaarheid van predicaten heel interessant kan zijn, bewijst de zogenaamde Kleene-hierarchie voor recursieve predicaten, waaruit onder andere blijkt, dat men met recursieve predicaten nieuwe predicaten kan opbouwen met quantorentorens van willekeurige hoogte. Dat zijn dan echte torens, d.w.z. niet tot lagere reduceerbaar.
Stelt men $\Pi_k^o$ de klasse van predicaten van de vorm

---

*) $\pm$ staat voor gen. of existentiële quantor

$(+x_1)(-x_2)\ldots(\pm x_k)\ R(n,x_1,\ldots,x_k)$ met recursieve R

en $\Sigma_k^0$ de klasse van predicaten van de vorm

$(-x_1)(+x_2)\ldots(\pm x_k)\ R(n,x_1,\ldots,x_k)$ met recursieve R,

dan heeft men

bij elke $A(u) \in \Sigma_k^0$ is een $B(u) \in \Pi_k^0 \setminus \Sigma_k^0$ met $B(u) \notin \Pi_1^0$ (of $\Sigma_1^0$) voor $1 < k$, en de recursieve predicaten zijn juist die in $\Pi_1^0 \cap \Sigma_1^0$.

In de aanvang heb ik het verwijderen van quantoren door middel van definitie van nieuwe predicaten waarin quantoren optreden afgewezen, omdat een dergelijke procédé geen wezenlijke reductie zou geven. Toch wordt dit procédé in de wiskunde herhaaldelijk toegepast en levert dan ook wel degelijk een grotere overzichtelijkheid op. Hoewel dus de reductie niet 'wezenlijk' is, is ze toch nuttig.
Of een dergelijke introductie nuttig is of niet hangt er van af of men bij de afleiding van nieuwe resultaten kan nalaten het geïntroduceerde begrip te analyseren of niet.

Zo blijkt bijvoorbeeld in de topologie de introductie van het predicaat 'X is een open verzameling' uitermate vruchtbaar, omdat men het merendeel van de interessante stellingen kan bewijzen zonder dit begrip nader te analyseren, doch door slechts gebruik te maken van enige eenvoudig te formuleren eigenschappen. Hierdoor bereikt men een doeltreffende reductie van quantorentorens (met zelfs de mogelijkheid genoemd predicaat als uitgangspunt te nemen voor een axiomatisering).

We zullen hier nu niet nader op in gaan, maar eens kijken naar een quantorentorentje, dat men in de elementaire wiskunde ook reeds ontmoet, nl. in de uitspraak, dat een oneindige rij getallen $\alpha=\{a(n)\}$ convergent is naar zeker getal.
Men kan deze situatie zo uitdrukken,

$$C(\alpha,a) \equiv (p)(Eq)(r)(|a(q+r)-a| < 2^{-p}).$$

We hebben hier drie quantoren in successie, waarbij in het bizonder de tweede quantor voor de complicatie zorgt

Indien nl. alle quantoren generaliserende quantoren waren, werkten we juist zo effectief zonder quantoren. Er is nu echter ook een manier om de existentiele quantor eruit te lichten, nl. door de introductie van een functie $\phi(p)$.

De uitspraak $C(\alpha,a)$ wordt dan gelijkwaardig met: er is een functie $\phi$ , zodat geldt

$$(p)(r)\ (|a(\phi(p)+r)-a| < 2^{-p}).$$

Misschien beschouwt U deze werkwijze als boerenbedrog, want in wezen is er nog een existentie-eis aanwezig, nl. in de eis, dat er een functie $\phi$ moet bestaan.

Deze existentie-eis kunnen we echter elimineren, door een wijziging in het begrip convergente rij, nl. een naar a convergente rij $\alpha$ is een paar functies $Q(u),\phi(u)$ zodat

$$(p)(r)(|a(\phi(p)+r)-a| < 2^{-p})$$

en in bewijzen kunnen we net zo goed met de niet gequantificeerde uitdrukking

$$|a(\phi(p)+r)-a| < 2^{-p}$$

met de zogenaamde vrije variabelen p en r werken.

We kunnen zo zelfs een behandelingswijze verkrijgen welke het gebruik van quantoren geheel vermijdt: een vrije variabele rekening. In het bizonder is een dergelijke werkwijze aan te bevelen in speciale gebieden, bv. de rekursieve rekenkunde.

Deze methode vindt toepassing in axiomatisch opgezette theorieen, met name in de axiomatische meetkunden, waarbij men althans het axiomastelsel vrij maakt van existentieuitspraken.

Overigens prefereert men in de wiskunde een afwisseling van het werken met quantoren en het elimineren ervan.

Het komt veelvuldig voor, dat men in een bewijs gevorderd is tot een uitspraak $(Ex)A(x)$. Op dat ogenblik introduceert men een nieuw symbool zeg $x_o$ waarvoor men veronderstelt $A(x_o)$. Zet dan een redenering op met tot slot een formule, waarin $x_o$ niet meer voorkomt en laat deze dan volgen uit de formule $(Ex)A(x)$.