

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-007

Aanleiding: Twee door Prof. Koksma ontvangen manuscripten voor
"Simon Stevin" door

L. Mirsky

- I. On the distribution of integers having a prescribed number of
divisors
- II. On a problem in the theory of numbers



1948

Aanleiding: Twee door Prof. Koksma ontvangen manuscripten voor "Simon Stevin" door

E. Mirsky.

1. On the distribution of integers having a prescribed number of divisors.

Bewezen worden twee stellingen:

① Laet $Q(x, a_1, a_2, \dots, a_s)$ het aantal gehele positieve getallen $n \leq x$ voorstellen, waarvoor n te schrijven is als $n = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$ met verschillende priemgetallen $p_1, p_2, \dots, p_s$.

Voor ieder gegeven stelsel positieve gehele getallen $s, r, a_1, a_2, \dots, a_s$, die voldoen aan $s \geq 2$; $1 \leq r < s$ en $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r \geq a_{r+1} = a_{r+2} = \dots = a_s$,

geldt $Q(x, a_1, a_2, \dots, a_s) = D(a_1, \dots, a_s) \frac{x^{\frac{1}{s}} (\log \log x)^{s-2}}{\log x} + O\left(\frac{x^{\frac{1}{s}} (\log \log x)^{s-2}}{(\log x)^{s-2}}\right)$

Hierin is $\begin{cases} \sigma(s) = s-2 \text{ als } s > 1 \\ \sigma(s) = 0 \text{ als } s = 1 \end{cases}$ en $\begin{cases} \tau(s) = 1 \text{ als } s > 1 \\ \tau(s) = 2 \text{ als } s = 1. \end{cases}$

Het getal $D(a_1, a_2, \dots, a_s)$ wordt gedefinieerd na invoering van de volgende symbolen. Als r getallen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ alle > 1 gegeven zijn, dan is

$$Z(\delta_1, \dots, \delta_r) = \sum_{p_1, \dots, p_r} \frac{1}{p_1^{\delta_1} \dots p_r^{\delta_r}}$$

hierbij moet de sommatie uitgestrekt worden over alle r -tallen $[p_1, \dots, p_r]$ van verschillende priemgetallen. Verder is

$$Z(t_1, \dots, t_s) = \frac{1}{h_1! h_2! \dots h_s!}$$

Als de getallen $t_1, \dots, t_s$ verdeeld kunnen worden in u groepjes van $h_1, h_2, \dots$ en h_u elementen, terwijl twee getallen dan en slechts dan tot eenzelfde groepje behoren als ze gelijk zijn. Met deze symbolen geldt

$$D(a_1, \dots, a_s) = (s-r)a_s g(a_1, \dots, a_s) Z\left(\frac{a_1}{a_s}, \frac{a_2}{a_s}, \dots, \frac{a_r}{a_s}\right).$$

② Laet $\Delta(x, k)$ het aantal gehele positieve getallen $\leq x$ met precies k delers voorstellen. We schrijven $k = \omega^{m-1} l$, waarin ω de kleinste priemfactor van k is en ω geen deler van l is.

Dan geldt

$$\Delta(x, k) = A(k) \frac{x^{\frac{1}{\omega}} (\log \log x)^{m-1}}{\log x} + O\left(\frac{x^{\frac{1}{\omega}} (\log \log x)^{m-1}}{(\log x)^{m-1}}\right)$$

met $\frac{1}{\omega-1}$ als $l = 1$

$$A(k) = \left(\frac{\omega-1}{(m-1)!} \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} g(a_1, \dots, a_s) Z\left(\frac{a_1}{\omega-1}, \dots, \frac{a_s}{\omega-1}\right) \right) \text{ als } l > 1.$$

Hierbij moet $\sum_{s_1}$ uitgestrekt worden over alle stelsels van s positieve gehele getallen $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_s \geq 1$ met $a_1 a_2 \dots a_s = l$

Tenslotte wordt nog opgemerkt: als $\Delta_1(x, k)$ het aantal gehele positieve getallen $\leq x$ met ten hoogste k delers is, dan zal voor $k \geq 4$:

$$\Delta_1(x, k) = \frac{x (\log \log x)^{m-1}}{(m-1)! \log x} + O\left(\frac{x (\log \log x)^{m-2}}{\log x}\right)$$

met $m =$ entier de $\frac{\log k}{\log 2}$

Bij het bewijs van stelling I worden de volgende lemma's gebruikt.

1. $\frac{(\log \log x/y)^s}{\log x/y} = \frac{(\log \log x)^s}{\log x} + O\left(\frac{(\log \log x)^s \log y}{(\log x)^2}\right) \quad (1 \leq y \leq \sqrt{x})$

2. $\sum_{p_1 p_2 \dots p_s \leq x} \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_s} = (\log \log x)^s + O((\log \log x)^{s-1})$

Hierin betekent $\sum_{p_1 p_2 \dots p_s \leq x}$ de herhaalde som $\sum_{p_1} \sum_{p_2} \dots \sum_{p_s}$, ieder over alle priemgetallen uit te strekken, met voorwaarde $p_1 p_2 \dots p_s \leq x$.

3. $\sum_{p_1 p_2 \dots p_s \leq x} \frac{\log p_1 p_2 \dots p_s}{p_1 p_2 \dots p_s} = O(\log x (\log \log x)^{s-1})$

4. $\sum_{p_1 p_2 \dots p_s \leq x} \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_s} = \frac{x (\log \log x)^{s-1}}{\log x} + O\left(\frac{x (\log \log x)^{s-1} \sigma(s)}{(\log x)^2}\right) \quad (O = g_{2,0}(0))$

5. $Q(x, 1, 1, \dots, 1) = \frac{x (\log \log x)^{s-1}}{(s-1)! \log x} + O\left(\frac{x (\log \log x)^{s-1} \sigma(s)}{(\log x)^2}\right)$

6. We definiëren nog

$$T_s(x, \delta_1, \dots, \delta_r) = \sum_{y = x/p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_r^{\delta_r}} Q(y, 1, 1, \dots, 1)$$

waarin $y = x/p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_r^{\delta_r}$ en de som uitgestrekt moet worden over alle stelsels van r verschillende priemfactoren $p_1, \dots, p_r$ zodat

$p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_r^{\delta_r} \leq x$. Dan geldt, als alle getallen $\delta_1, \dots, \delta_r > 1$ zijn:

a) voor $s \geq 1$: $T_s(x, \delta_1, \dots, \delta_r) = Z(\delta_1, \dots, \delta_r) \cdot \frac{x (\log \log x)^{s-1}}{(s-1)! \log x} + O\left(\frac{x (\log \log x)^{s-1} \sigma(s)}{(\log x)^2}\right)$

b) voor $s \geq 0$: $T_s(x, \delta_1, \dots, \delta_r) = O\left(\frac{x (\log \log x)^{s-1} \sigma(s+1)}{(\log x)^2}\right)$

Stelling I wordt nu bewezen door op te merken, dat voor

$$Q' = \frac{Q(x, a_1, \dots, a_r)}{g(a_1, \dots, a_r)} = \sum_{p_1} \sum_{p_2} \dots \sum_{p_r} 1,$$

(waarin de eerste som wordt uitgestrekt over alle r -tallen verschillende priemgetallen $p_1, p_2, \dots, p_r$ met $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r} \leq x$ en de tweede som over alle $(s-r)$ -tallen ω onderling en van alle $p_1, \dots, p_r$ verschillende priemgetallen $p_{r+1}, \dots, p_s$ met $p_{r+1} p_{r+2} \dots p_s \leq x^{1/\omega}$

en $Q'' = \sum_{p_{r+1}} \sum_{p_{r+2}} \dots \sum_{p_s} 1,$

(waarbij nu in de som over ω wordt toegelaten dat van de onderling verschillende priemgetallen $p_{r+1}, \dots, p_s$ er één of meer aan de priemgetallen $p_1, \dots, p_r$ gelijk zijn),
de schatting:

$$|Q' - Q''| = O \left(x^{\frac{1}{s}} \frac{(\log \log x)^{r(s-r)}}{(\log x)^{r(s-r)}} \right)$$

geldt.

Vorder wordt de stelling II bewezen met behulp van de formule

$$\Delta(x, k) = \sum_{a_1, \dots, a_s} \sum_{a_1, \dots, a_s} O(x, a_1-1, a_2-1, \dots, a_s-1),$$

waarbij de som over $a_1, \dots, a_s$ uitgestrekt wordt over alle s-tallen $a_1, a_2, \dots, a_s > 1$ met $k = a_1 a_2 \dots a_s$.

Opmerkingen.

1. De resultaten lijken niet onaardig, ofschoon het te betwijfelen valt of ze geheel nieuw zijn.
2. Een kleine onjuistheid bij het bewijs van Stelling I werd aangetoond en gecorrigeerd.

I. On a problem in the theory of numbers.

$\mu_r(n)$ zij 1 of 0, al naar n deelbaar is door een r-de macht of niet ($r \geq 2$). Beschouw nu sommen

$$N(x) = \sum_{n \leq x} \mu_r(n) \mu_{a_1}(q_1 n + k_1) \dots \mu_{a_s}(q_s n + k_s).$$

De auteur noemt zonder bewijs de volgende stelling:

Stelling 1. (i) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_r(n) \dots \mu_{a_s}(q_s n + k_s) \left\{ \frac{a_1^s}{(q_1^s, q_s)} \dots \frac{a_s^s}{(q_s^s, q_s)} \right\}^{-1}$ convergeert absoluut.

(ii) Voor $x \rightarrow \infty$ geldt: $N(x) = Ax + O(x^{\frac{s}{r+1} + \epsilon})$, waarin f een willekeurig positief getal is. (Gebruikte notaties:

$E(n_1, \dots, n_s)$ is 1 of 0 al naar het stelsel simultane congruenties in m , $q_1 m + k_1 \equiv 0 \pmod{n_1} \dots (1 \leq i \leq s)$ oplosbaar is of niet;

$(u_1, \dots, u_s)$ en $\{u_1, \dots, u_s\}$ betekenen resp. de g.g.d. en het k.g.v. van $u_1, u_2, \dots, u_s$)

Laat $\mathcal{N}$ de verzameling zijn van alle positieve gehele n zo, dat geen van de getallen $q_1 n + k_1, q_2 n + k_2, \dots, q_s n + k_s$ door een r-de macht deelbaar is. (Dan is dus $N(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}} 1$)

De auteur bewijst nu:

Stelling 2. De verzameling $\mathcal{N}$ is leeg, of zijn dichtheid Δ is positief.