

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1959 - 007

Een transformatie van een dubbelintegraal

A.H.M. Levelt



1959

Archiefplan

Een transformatie van een dubbelintegraal

door

A.H.M. Levelt

Een onderzoek van B. van der Pol *) leidde tot de vraag functies $I_1^*(\rho_0, z_0; t)$ en $I_2^*(\rho_0, z_0; t)$ te bepalen met de eigenschap dat voor $j=1,2$ geldt

$$(1) \quad -\frac{\partial}{\partial z_0} \int_0^\infty e^{-pt} I_j^*(\rho_0, z_0; t) dt = I_j(\rho_0, z_0; p) = \int_0^\infty \frac{e^{-z_0 \sqrt{\lambda^2 + p^2 n_j^2}} J_0(\lambda \rho_0)}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 n_j^2}} \lambda d\lambda.$$

Hierin stellen $p, \rho_0, z_0, n_1, n_2, \nu$ positieve getallen voor en

$$(2) \quad n_1 < \nu < n_2.$$

Gebruikmakend van de formules

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 \nu^2}} = \int_0^\infty e^{-p\rho\nu} J_0(\lambda \rho) d\rho,$$

$$(4) \quad J_0(\lambda \rho) J_0(\lambda \rho_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0(\lambda \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi + \rho_0^2}) d\varphi,$$

$$(5) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-z_0 \sqrt{\lambda^2 + p^2 n_j^2}} J_0(\lambda \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi + \rho_0^2}) \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 n_j^2}} = \frac{e^{-pn_j \sqrt{z_0^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi}}}{\sqrt{z_0^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi}}$$

(Zie Magnus & Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2.Auflage; resp. p.47, p.31

(3a) en p.179),

toonde B. van der Pol de volgende betrekking aan

$$(6) \quad I_j(\rho_0, z_0; p) = \int_0^\infty \frac{e^{-z_0 \sqrt{\lambda^2 + p^2 n_j^2}} J_0(\lambda \rho_0) \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 n_j^2}} =$$

$$-\frac{\partial}{\partial z_0} \int_0^\infty \frac{e^{-z_0 \sqrt{\lambda^2 + p^2 n_j^2}} J_0(\lambda \rho_0) \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 n_j^2}} = \int_0^\infty e^{-p\rho\nu} J_0(\lambda \rho) d\rho =$$

$$-\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{e^{-z_0 \sqrt{\lambda^2 + p^2 n_j^2}} \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + p^2 n_j^2}} \int_0^\infty e^{-p\rho\nu} J_0(\lambda \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi + \rho_0^2}) d\rho =$$

*) On discontinuous electromagnetic waves and the occurrence of a surface wave. Electromagnetic wave theory symposium.

$$-\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho\nu} e^{-\rho n_j \sqrt{z_0^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi + \rho^2}}}{\sqrt{z_0^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi + \rho^2}} d\rho$$

Wij vervangen nu de integratievariabele ρ door t door middel van de volgende transformatie

$$(7) \quad t = \nu\rho + n_j \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi + \rho_0^2} \quad (R_0 = \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2})$$

t en ρ voldoen dan aan de kwadratische betrekking

$$(8) \quad t^2 - 2\nu t\rho + (\nu^2 - n_j^2)\rho^2 + 2\rho_0 n_j^2 \cos\varphi \cdot \rho - n_j^2 R_0^2 = 0$$

In het ρ, t -vlak stelt dit een hyperbool voor met asymptotische richtingen $\frac{t}{\rho} = \nu \pm n_j$ en middelpunt $(2\rho_0 \cos\varphi, 2\nu\rho_0 \cos\varphi)$. De t -as wordt gesneden in $\pm n_j R_0$. De transformatie (7) wordt gegeven door het deel van de hyperbooltak dat de positieve t -as snijdt (in $t = n_j R_0$)

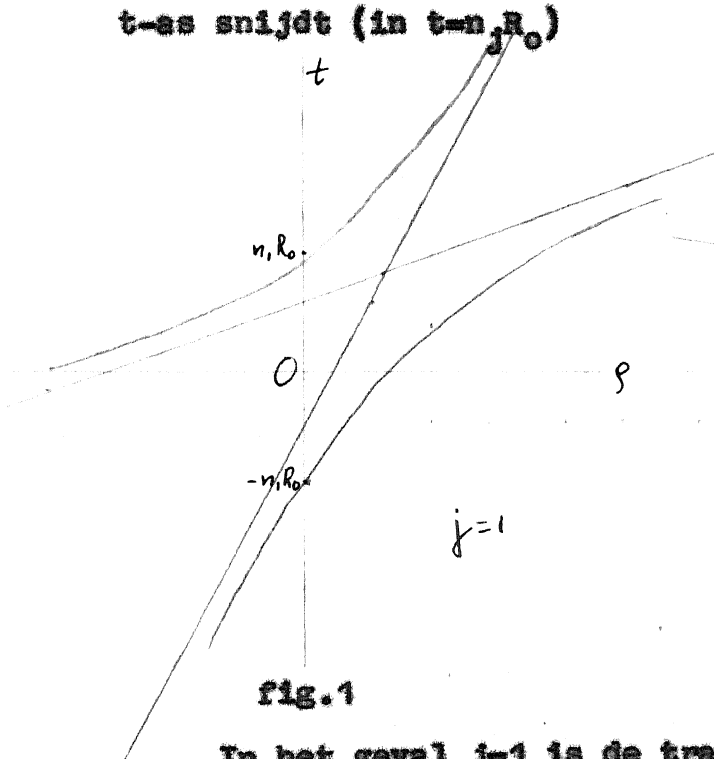


fig.1

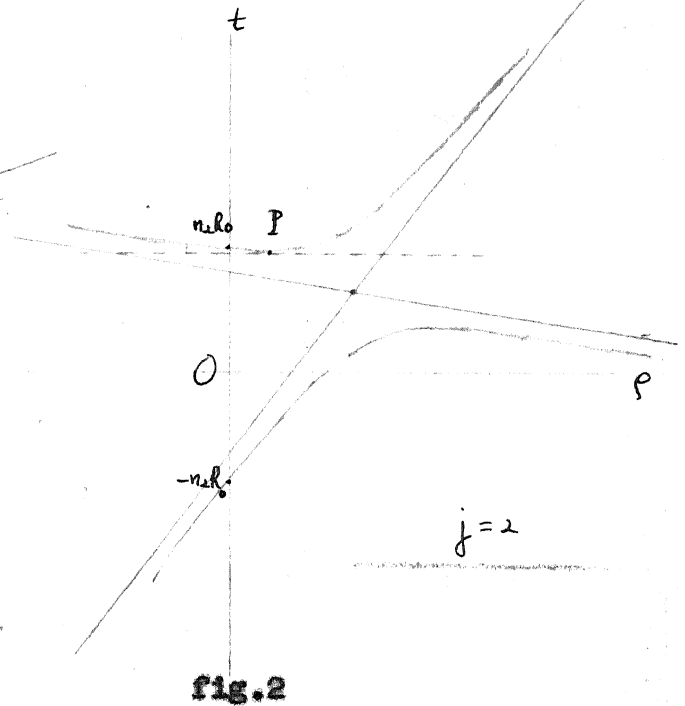


fig.2

In het geval $j=1$ is de transformatie (7) monotoon, terwijl in het geval $j=2$ (7) niet monotoon is, wanneer het punt $P \left(\rho_0 \cos\varphi - \nu \frac{\sqrt{R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2\varphi}}{\sqrt{n_2^2 - \nu^2}}, \nu\rho_0 \cos\varphi + \sqrt{n_2^2 - \nu^2} \sqrt{R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2\varphi} \right)$, waarin de raaklijn horizontaal is, rechts van de t -as ligt. Dit laatste treedt op wanneer $\cos\varphi > \frac{\nu R_0}{n_2 \rho_0}$. Gemakkelijk gaat men na, dat uit (7) en (8) volgt

$$\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi + R_0^2}} = \frac{n_j dt}{\sqrt{\nu t + (n_j^2 - \nu^2)\rho - n_j^2 \rho_0 \cos\varphi}}$$

Door (8) naar ρ op te lossen vindt men

$$(n_j^2 - \nu^2)\rho + \nu t - \rho_0^2 n_j^2 \cos^2\varphi = \pm n_j \sqrt{(t - \nu\rho_0 \cos\varphi)^2 - (n_j^2 - \nu^2)(R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2\varphi)}$$

zodat geldt

$$(9) \quad \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi + R_0^2}} = \pm \frac{dt}{\sqrt{(t - \nu\rho_0 \cos\varphi)^2 - (n_j^2 - \nu^2)(R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2\varphi)}}$$

(beide wortels stellen positieve getallen voor).

Het + teken geldt in het geval 1, en in het geval 2, wanneer

$\cos\varphi < \frac{\nu R_0}{n_2 \rho_0}$, bovendien moet het + teken genomen worden voor $j=2$ op het t -interval $(\nu\rho_0 \cos\varphi + \sqrt{n_2^2 - \nu^2} \sqrt{R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2\varphi}, \infty)$

wanneer $\cos\varphi > \frac{\nu R_0}{n_2 \rho_0}$, terwijl het - teken in dit laatste geval gekozen moet worden voor $\nu\rho_0 \cos\varphi + \sqrt{n_2^2 - \nu^2} \sqrt{R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2\varphi} < t < n_2 R_0$.
Hiermee is bewezen, dat

$$(10) \quad I_j(\rho_0, z_0) = -\frac{\partial}{\partial z_0} \int_0^\infty e^{-\nu t} dt \frac{1}{n_j R_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(t - \nu\rho_0 \cos\varphi)^2 - (n_j^2 - \nu^2)(R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2\varphi)}}$$

voor $j=1$, en voor $j=2$, wanneer tenminste $\nu R_0 > n_2 \rho_0$ (dan is immers $\cos\varphi$ steeds $< \frac{\nu R_0}{n_2 \rho_0}$).

Tenslotte behandelen we het geval $j=2$ en $\nu R_0 < n_2 \rho_0$.

Dan geldt

$$(11) \quad I_2(\rho_0, z_0) = -\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dt - \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\nu R_0} dt =$$

$$-\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{t_1}^{n_2 R_0} dt - \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dt - \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{n_2 R_0}^\infty dt,$$

waarin de integrand van het eerste tweetal dubbelintegralen

$$\frac{e^{-\rho(\rho\nu + n_2 \sqrt{R_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi + \rho^2})}}{\sqrt{R_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi + \rho^2}}$$

is, en in het laatste drietal

$$\frac{e^{-\rho t}}{\sqrt{(t - \nu\rho_0 \cos\varphi)^2 - (n_2^2 - \nu^2)(R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2\varphi)}}$$

Verder is

$$t_1 = \nu\rho_0 \cos\varphi + \sqrt{n_2^2 - \nu^2} \sqrt{R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2\varphi}.$$

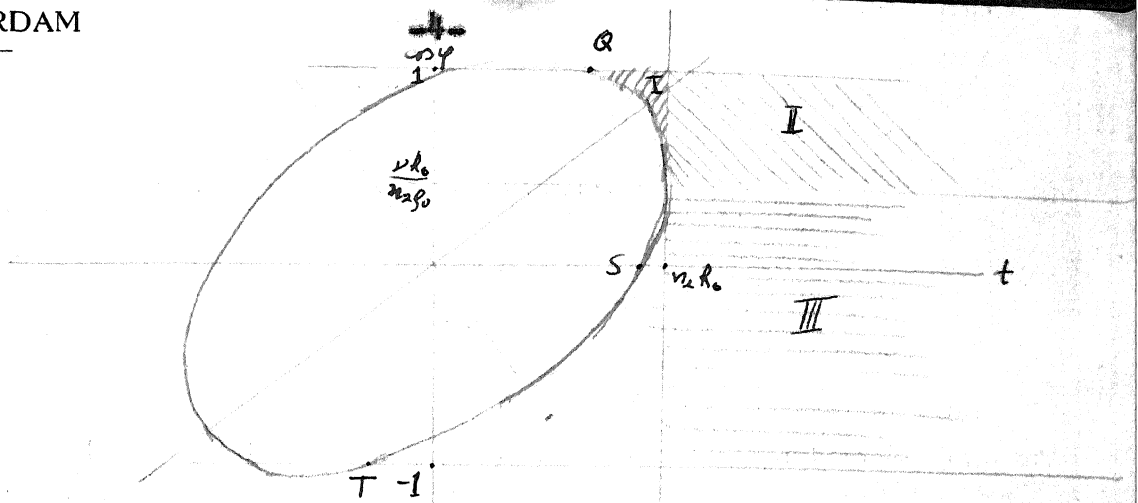


fig.3

In fig.3 is de "ellips"

$$(12) \quad (t - \nu \rho_0 \cos \varphi)^2 - (n_2^2 - \nu^2)(R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi) = 0$$

getekend in het $t, \cos \varphi$ -vlak.

$$(13) \quad t = t_1 = \nu \rho_0 \cos \varphi + \sqrt{n_2^2 - \nu^2} \sqrt{R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi}$$

is een parametervoorstelling van de boog QST van deze figuur. (Q heeft t -coördinaat $\nu \rho_0 + \sqrt{(R_0^2 - \rho_0^2)(n_2^2 - \nu^2)}$). We zien nu gemakkelijk in, dat de eerste dubbelintegraal in (11) zich uitstrekt over gebied I, de tweede over I+II en de derde over III. We hebben dus twee maal de integraal over I en dan nog de integraal over II+III. Het gebied I kunnen we ook beschrijven door

$$(14) \quad \nu \rho_0 + z_0 \sqrt{n_2^2 - \nu^2} \leq t \leq n_2 R_0, \quad \frac{t \nu + \sqrt{(n_2^2 - \nu^2)(n_2^2 R_0^2 - t^2)}}{n_2^2 \rho_0} \leq \cos \varphi$$

(los hiertoe (12) naar t op) en het gebied II+III door

$$(15) \quad n_2 R_0 \leq t < \infty \quad (\text{geen beperking voor } \cos \varphi).$$

Het resultaat voor $\nu R_0 < n_2 \rho_0$ is dus

$$(16) \quad I_2(\rho_0, z_0) = -2 \frac{\partial}{\partial z_0} \int_0^{n_2 R_0} e^{-pt} dt \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(t - \nu \rho_0 \cos \varphi)^2 - (n_2^2 - \nu^2)(R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi)}} \\ - \frac{\partial}{\partial z_0} \int_{n_2 R_0}^{\infty} e^{-pt} dt \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(t - \nu \rho_0 \cos \varphi)^2 - (n_2^2 - \nu^2)(R_0^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi)}} \\ \text{with } \cos \varphi \geq \frac{t \nu + \sqrt{(n_2^2 - \nu^2)(n_2^2 R_0^2 - t^2)}}{n_2^2 \rho_0}$$

In alle gevallen zijn de φ -integralen volledige elliptische van de eerste soort.