STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1953 - 008
(intern)

Enige eigenschappen van regelmatige veelhoeken

H.J.A. Duparc en W. Peremans

1953

<u>Enige eigenschappen van regelmatige veelhoeken</u>

door

H.J.A.Duparc en W.Peremans.

Dit rapport is ontstaan uit de bewerking van een op het Mathematisch Centrum ontvangen brief.

In navolging van de in deze brief ingevoerde notatie stellen wij $(n,p) = 2 \sin \frac{p\pi}{n}$, zodat (n,p) de lengte aangeeft van een zijde of diagonaal, al naar gelang $p = 1$ of $p = 2,\ldots,[\frac{1}{2}n]$, van de regelmatige n-hoek beschreven in een cirkel met straal 1.

Men heeft dan

$$\begin{aligned} (n,n-p) &= (n,p) \\ (n,n+p) &= (n,p-n) = -(n,p) \\ (kn,kp) &= (n,p). \end{aligned}$$

Wij gaan nu uit van de vergelijking

$$z^m = e^{\pi i \frac{p}{n}},$$

met wortels $z_j = e^{\pi i(\frac{p}{nm} + \frac{2j}{m})}$ $(j = 0,\ldots,m-1)$. We beperken ons tot oneven m. Men heeft dan $z^m - z^{-m} = e^{\pi i \frac{p}{n}} - e^{-\pi i \frac{p}{n}} =$ $= 2i \sin \pi \frac{p}{n} = i(n,p)$. Stelt men $\frac{1}{i}(z - z^{-1}) = u$, dan heeft men allereerst

$$u_j = \frac{1}{i}(z_j - z_j^{-1}) = (nm,\ p+2nj) \quad (j = 0,\ldots,m-1)$$

en verder voldoen deze m getallen aan een vergelijking die men krijgt na eliminatie van z uit $z^m - z^{-m} = i(n,p)$ en $z - z^{-1} = iu$. Stelt men $z^m - z^{-m} = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} i \varphi_m(u)$, dan geldt

$$\varphi_1(u) = u,\ \varphi_3(u) = u^3 - 3u;$$

$$\varphi_{m+2}(u) = (u^2-2)\varphi_m(u) - \varphi_{m-2}(u),$$

waarmee successievelijk $\varphi_m(u)$ voor $m = 5,7,\ldots$ kan worden bepaald. Hieruit ziet men dat de functies $\varphi_m(u)$ veeltermen van de graad m in u zijn, met gehele coëfficiënten. De coëfficiënten van de even machten van u zijn gelijk aan nul. Verder is de coëfficiënt van u^{m-2} gelijk aan $-m$ en de coëfficiënt van u is gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}m$.

Ons eliminatieresultaat wordt dus

$$(1) \qquad \varphi_m(u) + (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}(n,p) = 0.$$

Omdat de coëfficiënt van u^{m-1} gelijk aan nul is, geldt

$$(2) \qquad \sum_{j=0}^{m-1} (nm,\ p + 2nj) = 0$$

Met behulp hiervan vinden we de volgende in de brief vermelde resultaten.

Neemt men $m = 3$, $n = 75$, $p = 112$, dan krijgt men:
$0 = (225,\ 112) + (225,\ 262) + (225,\ 412) =$
$= (225,\ 112) - (225,\ \ 37) - (225,\ \ 38)$.

Neemt men $m = 5$, $n = 45$, $p = 22$, dan krijgt men:
$0 = (225,\ 22) + (225,\ 112) + (225,\ 202) + (225,\ 292) + (225, 382) =$
$= (225,\ 22) + (225,\ 112) + (225,\ 23) - (225,\ 67) - (225,\ 68)$.

Neemt men $m = 15$, $n = 15$, $p = 8$, dan krijgt men een derde dergelijke in de brief opgegeven formule bestaande uit 15 termen.

De in de brief opgegeven vergelijking waarvan deze 15 termen de wortels zijn, is dezelfde als vergelijking (1) met $m = 15$, $n = 15$, $p = 8$.

Wij merken verder op dat in (1) de coëfficiënt van elke positieve even macht van u gelijk is aan nul, waaruit met de theorie der symmetrische functies volgt dat formule (2) blijft gelden als elke term in het linkerlid ervan vervangen wordt door zijn $(2h+1)^{e}$ macht $(h = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2})$.

Het product der wortels van vergelijking (1) is gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\ (n,p)$. Nemen wij $m = 5$, $n = 5$, $p = 1$, dan vinden wij de in de brief opgegeven formule $(5,1) =$
$= (25,1)\ (25,4)\ (25,9)\ (25,6)\ (25,11)$.

Nemen wij $n = 1$, $p = 0$, dan is $(n,p) = 0$. Vergelijking (1) wordt dan $\varphi_m(u) = 0$, met wortels $(m,2j)$ $(j = 0,\ldots,m-1)$. Deelt men door u, dan gaat de laatstbeschouwde vergelijking over in een vergelijking met bekende term $(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}m$ en met de wortels $(m,2j)$ $(j = 1,\ldots,m-1)$. Hun product is dus gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}m$, waaruit gemakkelijk resultaten volgen over de producten der verschillende koordenlengten in regelmatige veelhoeken.

Uit het feit dat in vergelijking (1) de coëfficiënt van u^{m-1} gelijk aan nul is en de coëfficiënt van u^{m-2} gelijk is aan $-m$ volgt vrijwel onmiddellijk dat de som der kwadraten der wortels dezer vergelijking gelijk is aan 2m, dus $\sum_{p=1}^{n-1}(n,p)^2 =$
$= 2n$, dus $\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} (n,p)^2 = n$.

Bovendien vindt men uit het bovenstaande nog gemakkelijk formules zowel voor het product als voor de som der kwadraten der grootheden (n,p), waarin p een gereduceerd restsysteem modulo n doorloopt.

Neemt men in formule (2) nu n = 2, p = 1, dan krijgt men

$$\sum_{j=0}^{m-1} (2m,\ 4j+1) = 0.$$

Als we hierin voor m een priemgetal kiezen, dan komt in deze som als m een viervoud +1 is de term (2m,m) = (2,1) = = 2 en als m een viervoud +3 is, de term (2m,3m) = -(2,1) = = -2 voor. De overige termen komen in paren gelijke voor. Een eenvoudige berekening leert dan dat:

$$\sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} (-1)^j\ (2m,\ 2j-1) = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}.$$

Vult men hierin m = 13 in, dan vindt men een der in de brief vermelde betrekkingen.

De in de brief gegeven betrekkingen van het type (11,1) + + (11,2) + (11,3) - (11,4) + (11,5) = $\sqrt{11}$ hebben wij slechts kunnen afleiden door dieper op de theorie van de eenheidswortels in te gaan.

Laat p een priemgetal zijn dat een viervoud +3 is. Men kan dan een z.g. primitieve wortel modulo p vinden, d.w.z. een getal g zodat de getallen g, $g^2, \ldots, g^{p-1}$ juist een gereduceerd restsysteem modulo p vormen. Aangezien $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ een primitieve p^e eenheidswortel voorstelt, voldoen de getallen

$$\alpha_1 = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \varepsilon^{g^{2k-1}} \text{ en } \alpha_2 = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \varepsilon^{g^{2k}},$$ zoals Gauss bewezen heeft, aan de vierkantsvergelijking $x^2 + x + \frac{1}{4}(p+1) = 0$.

Als verder ε^j in de som voorkomt die α_1 bepaalt, komt zijn inverse voor in de som die α_2 bepaalt en omgekeerd. Dus geldt

$$\sqrt{-p} = \alpha_1 - \alpha_2 = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(p-1)^2} \left(\varepsilon^{g^{2k-1}} - \varepsilon^{-g^{2k-1}} \right) =$$

$$= i \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} (p,\ 2g^{2k-1}), \text{ dus } \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} (p, 2g^{2k-1}) = \pm\sqrt{p}.$$

Neemt men b.v. p = 7, dan kan men g = 3 kiezen. We vinden dan $\pm\sqrt{7}$ = (7,6) + (7,54) + (7,486)

= (7,1) - (7,2) - (7,3).

Voor p = 11, kan men g = 2 kiezen. We vinden dan

$\pm\sqrt{11}$ = (11,4) + (11,16) + (11,64) + (11,256) + (11,1024) =

= (11,4) - (11,5) - (11,2) - (11,3) - (11,1).

In beide gevallen ziet men onmiddellijk dat het minteken moet worden genomen.

In het geval dat p een priemgetal is, dat een viervoud +1 is, ligt de zaak iets ingewikkelder. De veelterm $\frac{\varphi_p(u)}{u}$

kan ook nu geschreven worden als het product van twee veeltermen $\chi(u)$ en $\psi(u)$ elk van de graad $\frac{1}{2}(p-1)$, waarvan de coëfficiënten op veelvouden van $\frac{1}{2}\sqrt{p}$ na rationaal zijn. Met de theorie van Gauss laat zich aantonen dat helaas ook in $\chi(u)$ en $\psi(u)$ slechts termen met even machten van u optreden. Het is dientengevolge niet mogelijk om voor de nulpunten van $\chi(u)$ en $\psi(u)$ direct relaties van het zojuist afgeleide type te verkrijgen. Echter kan men door invoering van nog een vierkantswortel $\chi(u)$ verder ontbinden (hetzelfde geldt voor $\psi(u)$) en indien p-1 niet deelbaar is door 8, treden in deze ontbindingen ook termen van oneven graad in u op. In het algemeen, als p-1 precies k factoren 2 bevat, kan men $\frac{\varphi_p(u)}{u}$ schrijven als een product van 2^k veeltermen, elk van de graad $h = \frac{p-1}{2^k}$, in elk waarvan termen van even en oneven graad in u optreden. De coëfficiënten van elk dezer veeltermen kunnen met behulp van vierkantswortelvormen geschreven worden. Door eliminatie der irrationaliteiten uit de optredende h coëfficiënten kan men de enig mogelijke relaties met gehele coëfficiënten tussen koorden van de regelmatige p-hoek afleiden.

Om dit toe te lichten nemen wij het geval $p = 13$, waarbij $p-1 = 12 = 2^2.3$, dus $k = 2$ en $h = 3$. Men heeft

$$\frac{\varphi_{13}(u)}{u} = u^{12} - 13u^{10} + 65u^8 - 156u^6 + 182u^4 - 91u^2 + 13 =$$

$$= A^2 - 13B^2 = (A + B\sqrt{13})\,(A - B\sqrt{13}), \text{ waarin}$$

$$A = u^6 - \frac{13}{2}u^4 + 13u^2 - \frac{13}{2},$$

$$B = \frac{1}{2}u^4 - 2u^2 + \frac{3}{2}.$$

Stellen wij $w = \frac{13}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{13}$, dan is

$$A + B\sqrt{13} = C^2 - wD^2 = (C + D\sqrt{w})\,(C - D\sqrt{w}), \text{ waarin}$$

$$C = u^3 - \sqrt{13}u,$$

$$D = u^2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13},$$

en op analoge wijze kan men $A - B\sqrt{13}$ ontbinden.

Wij beschouwen de kubische uitdrukking

$$(3)\quad C - D\sqrt{w} = u^3 - \sqrt{w}u^2 - \sqrt{13}u + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\right)\sqrt{w}.$$

Uit de theorie van Gauss volgt dat de nulpunten van (3) gelijk zijn aan (13,2), -(13,5) en (13,6). Voert men de elementaire symmetrische functies S_1, S_2 en S_3 van deze wortels in dan heeft men

$$S_1 = \sqrt{w},$$
$$S_2 = -\sqrt{13},$$
$$S_3 = -(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{13})\sqrt{w}.$$

Door eliminatie van $\sqrt{13}$ en $\sqrt{w}$ vinden wij

$$S_1S_2 = 3S_1 + 2S_3. \tag{4}$$

Vervangt men in het rechterlid van (3) overal $\sqrt{13}$ door $-\sqrt{13}$ (ook in de betrekking die w bepaalt), dan gaat (3) over in een veelterm met nulpunten (13,1), (13,3) en (13,4). Voor de elementaire symmetrische functies dezer wortels geldt hetzelfde verband als uitgedrukt is in (4).

Wat ten slotte de in de brief vermelde formules betreft, waarin $\sqrt{2}$ optreedt, merken wij op dat men door volledige inductie gemakkelijk de formule

$$\sum_{k=1}^{2^{n-2}} (2^n,\ 2k-1) = \prod_{h=1}^{n-1} (2^{h+1},\ 2^h - 1)$$

bewijst. Voorts volgt uit $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ de betrekking

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{3\pi}{2^n}}{\frac{3\pi}{2^n}} = 1 \text{ dus } \pi = \frac{1}{3} \lim_{n \to \infty} 2^n \sin \frac{3\pi}{2^n} = \frac{1}{3} \lim_{n \to \infty} 2^{n-1}(2^n,3),$$

waarmee de in de brief gegeven limietvoorstelling van π gevonden is. Dergelijke limietvoorstellingen van π zijn reeds in de 17^e eeuw door Vieta gegeven.