STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1954 - 008

Voordracht in de serie Actualiteiten

A.P. Burger

27 maart 1954

Over een methode om diffractie-problemen voor hoge frequenties op te lossen.

1954

Voordracht door A.P. Burger in de serie

Actualiteiten op 27 Maart 1954.

Over een methode om diffractie-problemen voor hoge frequenties op te lossen.

1. Het randwaardeprobleem.

In wat volgt beperken we ons tot gevallen waarin slechts twee ruimte-coordinaten x en y een rol spelen. Het te beschouwen probleem is dat van de buiging van een geluidsgolf aan een vlak scherm, dat als volgt als randwaardeprobleem geformuleerd kan worden: [1] [2]

Zij $\chi(x,y,t)$ de scalaire snelheidspotentiaal, zodat de snelheid in het medium gegeven wordt door

$$\vec{v} = \nabla \chi$$

Als alle storingen die optreden klein zijn, voldoet de potentiaal aan de golfvergelijking

$$\Delta \chi - \frac{1}{c^2}\chi_{tt} = 0.$$

We veronderstellen verder dat de tijdsafhankelijkheid voorgesteld kan worden door

$$\chi(x,y,t) = \varphi_1(x,y)e^{i\nu t}.$$

Dan geldt $\Delta\varphi_1 + k^2\varphi_1 = 0$, waar $k = \frac{\nu}{c}$.

Als er een geringe demping in het medium toegelaten wordt, mag k complex zijn, met $\mathrm{Im}\, k < 0$.

Laat het oneindig dunne scherm op het segment I van de x-as liggen. Op het scherm is de snelheid in de richting loodrecht op het oppervlak nul, d.w.z.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \qquad \text{voor } x \in I, \quad y = 0\,\pm .$$

Zij de invallende golf in afwezigheid van het scherm beschreven door $\varphi_0(x,y)$, en noem de storingspotentiaal $\varphi(x,y)$, zodat $\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi$. Dan geldt

$$\left.\begin{aligned} &(\Delta + k^2)\varphi = 0 \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = \frac{1}{ik} f(x), \text{ voor } x \in I,\ y = 0\,\pm \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dit betekent dat de oplossing φ antisymmetrisch is in y, en omdat φ overal buiten het scherm continu moet zijn, geldt ook nog

$$\varphi = 0 \qquad \text{voor } x \in I^c,\ y = 0. \tag{2}$$

Naast deze randwaarden moet ook nog aan φ de eis worden gesteld dat hij zich op oneindig als een cylindergolf gedraagt, die uit de oorsprong divergeert; φ moet dus verdwijnen voor grote $r_o = \sqrt{x^2+y^2}$.

Het dubbel genomen segment I van de x-as dat het scherm voorstelt, kan als een ontaarde convexe kromme opgevat worden en vanwege de scherpe randen in de eindpunten, zullen die punten "vertakkingspunten" van φ zijn. Om de oplossing verder vast te leggen eisen we dat de druk in de eindpunten eindig blijft. [3] De druk volgt direct uit de gelineariseerde bewegingsvergelijking van Euler en is gelijk aan

$$p = -\varrho \frac{\partial \chi}{\partial t} = -i\nu\, \varrho\, \varphi_1(x,y) e^{i\nu t}$$

waarin ϱ de gemiddelde dichtheid is. De kantvoorwaarde is dus dat φ in de eindpunten van I eindig blijft.

Het probleem dat voor ons ligt, is dus het oplossen van het randwaardeprobleem (1) en (2), met zekere beperkingen voor het gedrag van de oplossing in oneindig en op de schermkanten.

In een paar speciale gevallen is het mogelijk strenge oplossingen hiervoor te vinden. Als I het interval $(-\infty, \infty)$ is, is het probleem dat van weerkaatsing aan een vlak scherm, en $\varphi(x,y) = \varphi_o(x,-y)$. Als $I=(0,\infty)$ krijgen we het geval van buiging aan een half vlak, en dit probleem is door Sommerfeld in gesloten vorm opgelost. Als, ten slotte, I begrensd is, mogen we $I=(-1,1)$ kiezen, en dit probleem is door Sieger [4] en Strutt [5] opgelost met reeksen van Mathieu-functies.

Het is echter bijzonder moeizaam om uit de Mathieu-functies numerieke resultaten te krijgen, vooral als de frequentie ook maar enigszins hoog wordt.

2. De Kirchhoff-theorie.

Voor hoge frequenties bestaat er wel een benaderingsmethode waarmee in de optica goede resultaten verkregen worden, nl. door het gebruikmaken van de Kirchhoff-buigingstheorie. Het schijnt dat de Kirchhoff-oplossing de strenge oplossing asymptotisch benadert voor hoge frequenties, maar het is niet bekend in welke orde in k deze benadering geldt.

De Kirchhoff-theorie voor het twee-dimensionale geval berust op de volgende stelling van Helmholtz-Weber, die direct uit de stelling van Green volgt:

Als φ voldoet aan $(\Delta + k^2)\varphi = 0$, en continue eerste en tweede afgeleiden bezit binnen een gesloten kromme Γ, dan geldt

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4i} \int_\Gamma \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} H_0^{(2)}(kr) - \varphi \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kr) \right\} ds$$

voor (x,y) binnen Γ, terwijl de waarde van de integraal nul is voor (x,y) buiten Γ. Hierin is $\frac{\partial}{\partial n}$ differentiatie in de richting van de naar buiten gerichte normaal van Γ, en r de afstand van (x,y) tot het integratie-element.

De tweede Hankelse functie is hier als elementaire oplossing gekozen omdat deze het vereiste gedrag in oneindig bezit, nl. $H_0^{(2)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2i}{\pi kr}}\, e^{ikr}$, terwijl hij in de oorsprong $\sim -\frac{2i}{\pi} \log r$.

Kies nu Γ als de begrenzing van de halve cirkel $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq R$, $\eta \geq 0$, en laat (x,y) binnen Γ liggen. (ξ en η zijn lopende coördinaten langs de x-as en y-as resp., en $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. Dan geldt, omdat φ en $H_0^{(2)}(kr)$ aan de uitstralingsvoorwaarde voldoen, dat, met $R \to \infty$:

$$\varphi(x,y) = -\frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} H_0^{(2)}(kr) - \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} H_0^{(2)}(kr) \right\}_{\eta=0+} d\xi$$

$$= -\frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \varphi(\xi,0+)}{\partial \eta} H_0^{(2)}\left(k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \varphi(\xi,0+) \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}\left(k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\right) \right\} d\xi, \quad \text{voor } y > 0 \qquad (3)$$

aangezien $\frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kr) = -\frac{\partial}{\partial \eta} H_0^{(2)}(kr)$.

In ons geval is echter op I slechts $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ en op I^c slechts φ voorgeschreven, zodat (3) niet zonder meer bruikbaar is. Trouwens, φ en φ_y mogen ook niet onafhankelijk voorgeschreven worden: als in (3) y door -y vervangen wordt, wordt de integraal nul, en optellen en aftrekken levert dan

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,y) &= -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi(\xi,0+)}{\partial \eta} H_0^{(2)}\left(k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\right) d\xi, \\ &= -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,0+) \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}\left(k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\right) d\xi \end{aligned}\right\} \; y > 0. \qquad (4)$$

Voor $y < 0$ vinden we dezelfde formules, maar met tegengesteld teken en met 0+ vervangen door 0-.

De kunstgreep van Kirchhoff bestaat nu daaruit dat, niettegenstaande deze moeilijkheid, langs de hele lijn y=0 min of meer plausibele waarden voor φ en φ_y voorgeschreven worden, en formule (3) gebruikt wordt. Deze randwaarden zijn in het algemeen strijdig, en de gevonden benaderings-oplossing voldoet dan ook niet aan de opgelegde randwaarden. Alternatieve oplossingen worden gevonden door overal op $y=0$ waarden voor φ alleen of voor φ_y alleen voor te schrijven en (4) te gebruiken; dan voldoet het resultaat natuurlijk wel aan de opgelegde (benaderde) randwaarden.

Onlangs is door W. Franz [6] een methode van herhaalde benadering aangegeven voor de behandeling van diffractie-problemen, die een veralgemening is van de methode van Kirchhoff, maar de onzekerheid over de orde van benadering van de verschillende oplossingen, bestaat nog steeds.

In wat volgt is het de bedoeling om een nieuwe methode aan te geven voor de behandeling van dergelijke problemen, waarin het mogelijk zal zijn om aan te geven wat de orde van benadering voor hoge frequenties is.

3. Een Fourier-transformatie.

We beschouwen het volgende randwaardeprobleem: Een functie $\psi(x,y,z)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\psi - \psi_{zz} = 0, \qquad \text{waarin } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &\text{met randwaarden } \psi_y = f(x), \text{ voor } x \in I,\ y=0\,\pm,\ z > 0 \\ &\qquad\qquad \psi = 0 \text{ voor } x \in I^c,\ y = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Terwijl verder geëist wordt dat ψ overal buiten het segment $x \in I$, $y = 0$ continu is en verdwijnt voor grote r. De snelheidspotentiaal voor supersone stroming bij een draagvlak van oneindige koorde is een "physisch" voorbeeld van een functie die aan (5) voldoet. [7]

De karakteristieken van de differentiaalvergelijking zijn oppervlakken $F(x,y,z)=$ const., waarin F voldoet aan

$$F_x^2 + F_y^2 - F_z^2 = 0 .$$

We kunnen dus schrijven $F(x,y,z) = z \pm\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$

en de karakteristieken worden

$$z - z' = \pm\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

d.w.z. een dubbelstel cirkelkegels. We kunnen natuurlijk afspreken dat de voortplanting van storingen slechts langs dat stel karakteristieken met positief teken geschiedt. Dat houdt in dat we ψ identiek nul mogen nemen voor alle z links van de omhullende $z=z_0(x,y)$ van dergelijke kegels met toppunten op het segment $x \in I$, $y = 0$, $z = 0$.

Het is duidelijk dat, hoewel ψ continu gekozen is, er nog discontinuiteiten in de afgeleiden van ψ kunnen optreden en wel langs karakteristieke oppervlakken. Laat dergelijke oppervlakken van discontinuiteit aangeduid worden door $z=z_n(x,y)$, met $n=0,1,\ldots,N$, waarin N oneindig mag zijn.

Nemen we nu de Fourier-transform $T(\psi)$ van ψ. Dan geldt formeel (voor het geval $N=\infty$)

$$\varphi_x = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz}\psi\,dz = \frac{\partial}{\partial x}\int_{z_o}^{\infty} e^{-ikz}\psi\,dz$$

$$= -\frac{\partial z_o}{\partial x}\; e^{-ikz_o}\,\psi(x,y,z_o) + \int_{z_o}^{\infty} e^{-ikz}\,\psi_x\,dz$$

$$= \int_{z_o}^{\infty} e^{-ikz}\,\psi_x\,dz$$

$$\varphi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{z_n}^{z_{n+1}} e^{-ikz}\,\psi_x\,dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x}\; e^{-ikz_{n+1}}\,\psi_x(x,y,z_{n+1}-) - \frac{\partial z_n}{\partial x}\, e^{-ikz_n}\psi_x(x,y,z_n+) + \int_{z_n}^{z_{n+1}} e^{-ikz}\,\psi_{xx}\,dz\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial z_n}{\partial x}\; e^{-ikz_n}\,\delta\psi_x(x,y,z_n) + T(\psi_{xx})$$

waarin $\delta\psi_x(x,y,z_n) = \psi_x(x,y,z_n-) - \psi_x(x,y,z_n+)$.

Net zo voor φ_{yy}.

Verder

$$T(\psi_{zz}) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{z_n}^{z_{n+1}} e^{-ikz}\;\psi_{zz}\,dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{e^{-ikz_{n+1}}\,\psi_z(x,y,z_{n+1}-) - e^{-ikz_n}\,\psi_z(x,y,z_n+) + ik\int_{z_n}^{z_{n+1}} e^{-ikz}\,\psi_z\,dz\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ikz_n}\,\delta\psi_z(x,y,z_n+) + ik\int_{z_o}^{\infty} e^{-ikz}\,\psi_z\,dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ikz_n}\,\delta\psi_z(x,y,z_n+) - k^2\varphi\,.$$

De differentiaalvergelijking wordt dus

$$0 = T(\Delta\psi - \psi_{zz}) = \Delta\varphi + k^2\varphi - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ikz_n}\left\{\frac{\partial z_n}{\partial x}\delta\psi_x + \frac{\partial z_n}{\partial y}\delta\psi_y + \delta\psi_z\right\}$$

$$= (\Delta + k^2)\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ikz_n}\left[\frac{\partial z_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial z_n}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right]_{z=z_o-}^{z=z_o+}\cdot\psi$$

Hierin is de operator binnen de accoladen een afgeleide $\frac{\partial}{\partial \nu}$ in de richting $\bar{\nu}=(\frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, 1)$.

Aangezien $z=z_n$ een karakteristiek oppervlak is, geldt

$$(\frac{\partial z_n}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z_n}{\partial y})^2 - 1 = 0$$

d.w.z. $\bar{n}.\bar{\nu} = 0$, waarin $\bar{n} = (\frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, -1)$

de normaal op $z=z_n$ is; dus ligt $\bar{\nu}$ binnen dit oppervlak en is de operator een inwendige differentiatie. Uit de continuiteit van ψ volgt dus

$$\left[\frac{\partial z_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial z_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right]_{z=z_0-}^{z=z_0+} . \psi = 0$$

en de differentiaalvergelijking wordt

$$(\Delta + k^2)\varphi = 0 .$$

De randwaarden in (5) worden

$$\varphi_y = \int_0^\infty e^{-ikz} f(x)dz = \frac{1}{ik} f(x), \quad \text{voor } x \in I,\ y = 0 \pm$$

$$\varphi = 0 \qquad \text{voor } x \in I^c,\ y = 0.$$

Het blijkt dus dat $\varphi = T(\psi)$ een oplossing is van het oorspronkelijke probleem (1) en (2), zodat de opgaaf nu is om (5) op te lossen.

4. Oplossing van het getransformeerde probleem.

Voor de oplossing van (5) kan als volgt een integraalvoorstelling gevonden worden:

Wegens onze afspraak in § 3 is het duidelijk dat $\psi(x,y,z)$ slechts van dat gedeelte van de randwaarden kan afhangen, dat binnen de kegel C met toppunt (x,y,z) en met $\zeta < z$ ligt, nl.

$$\zeta = z - \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} .$$

Beschouw de halve ruimte $\eta \geq 0$, en definieer daarvan de deelruimte A_+ die door C en de oppervlakken $\eta = 0$ en $\zeta = z_0(\xi, \eta)$ omsloten wordt; noem de begrenzende stukken Γ_+, D_+ en E_+ resp. Definieer net zo de deelruimte A_- van de halve ruimte $\eta \leq 0$, begrensd door dezelfde drie oppervlakken, en noem de begrenzende stukken Γ_-, D_- en E_-. Binnen beide A_+ en A_- is ψ continu, en volgens de theorie van Hadamard-Riesz [8) 9)] kunnen we nu voor $y > 0$ schrijven

$$\left.\begin{aligned} \psi(x,y,z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{D_+ + E_+} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{\rho} - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{\rho} \right\} dS \\ 0 &= \frac{1}{2\pi} \iint_{D_- + E_-} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{\rho} - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{\rho} \right\} dS \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

waarin de notatie als volgt is:

$\left|\iint\right.$ = het "eindige stuk" van de (in het algemeen divergente) integraal

$\varrho = \sqrt{(z-\zeta)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}$

$\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ = differentiatie in de richting van de co-normaal (l,m,-n), als (l,m,n) de buitenwaarts gerichte normaal op het integratie-oppervlak is.

Zoals in § 3 is $\frac{\partial}{\partial\nu}$ op de karakteristieke oppervlakken een inwendige differentiatie, zodat in gebieden A behalve ψ ook $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$ continu is, en de oppervlakken $z = z_n(x,y)$ voor $n > 0$ geen bijdragen in (6) leveren. Aangezien op $z = z_0(x,y)$ ook nog $\psi = 0$ is, zijn al de integralen over de gebieden E nul. Verder valt op D de conormaal samen met de normaal, en dus is

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial\eta} & \text{op } D_+ \\ +\dfrac{\partial}{\partial\eta} & \text{op } D_- \end{cases}$$

Vergelijkingen (6) worden dus (steeds voor $y > 0$):

$$\psi(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi} \left|\iint_{D_+}\right. \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{1}{\varrho} - \psi\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{\varrho} \right\} d\xi\, d\zeta$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \left|\iint_{D_-}\right. \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{1}{\varrho} - \psi\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{\varrho} \right\} d\xi\, d\zeta.$$

Dus, door aftrekking

$$\psi(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi} \left|\iint_{D}\right. \left\{ \left[\frac{\partial\psi(\xi,0+,\zeta)}{\partial\eta} + \frac{\partial\psi(\xi,0-,\zeta)}{\partial\eta} \right] \frac{1}{\varrho} + \right.$$

$$\left. - \left[\psi(\xi,0+,\zeta) + \psi(\xi,0-,\zeta) \right] \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{\varrho} \right\} d\xi\, d\zeta$$

$$= -\frac{1}{\pi} \iint_{D} \frac{\partial\psi(\xi,0+,\zeta)}{\partial\eta} \cdot \frac{d\xi\, d\zeta}{\varrho} \qquad (\text{voor } y > 0) \qquad (7)$$

omdat, volgens (5), ψ antisymmetrisch is m.b.t. η. De haak mag hier weggelaten worden, omdat de integraal convergeert.

Dit resultaat is hetzelfde als dat van Evvard voor draagvlakken in supersone stroming.

Formule (7) kan als volgt gebruikt worden om het probleem (5) op te lossen. (Wegens de antisymmetrie in y beschouwen we in het vervolg slechts het geval $y > 0$).

In het algemeen is $D = D' + D''$, waarin $\xi \in I$ op D', $\xi \in I^c$ op D''.

$$\therefore \psi = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D'} \frac{f(\xi)\,d\xi\,d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2-r^2(\xi)}} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D''} \psi_\eta(\xi,o,\zeta)\frac{d\xi\,d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2-r^2(\xi)}} \qquad (8)$$

waarin $r(\xi) = \sqrt{(x-\xi)^2+y^2}$.

Voor sommige punten is $D'' = 0$, en dan is ψ volgens (8) bekend uit de randwaarden $f(\xi)$. Als echter $D'' \neq 0$, treedt in (8) ook de tweede integraal op, en daarin is ψ_η nog onbekend. Om deze te bepalen, gebruiken we de randvoorwaarde

$$\psi = 0 \quad \text{voor } x \in I^c,\ y = 0$$

en stellen $y = 0$ en $x \in I^c$ in (8):

$$\iint\limits_{D'} \frac{f(\xi)\,d\xi\,d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2-(x-\xi)^2}} = -\iint\limits_{D''} \frac{\psi_\eta\,d\xi\,d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2-(x-\xi)^2}} \qquad (9)$$

Dit is een integraalvergelijking, waaruit $\psi_\eta(\xi,o,\zeta)$ voor $\xi \in I^c$ bepaald kan worden, en dat is net wat we in de tweede integraal van (8) nodig hebben.

Daarmee is het probleem (5) in beginsel voor alle (x,y,z) opgelost en we kunnen de methode nu op een speciaal voorbeeld toepassen.

5. Toepassing op een half vlak.

We nemen $I = (o,\infty)$, dan wordt het oppervlak $z = z_o(x,y)$

$$z = \begin{cases} |y| & \text{voor } x > 0 \\ r_o & \text{voor } x < 0 \end{cases}.$$

In het gebied $0 < y < z < r_o$ wordt (8)

$$\psi(x,y,z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\sqrt{z^2-y^2}}^{x+\sqrt{z^2-y^2}} f(\xi)\,d\xi \int\limits_0^{z-r(\xi)} \frac{d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2-r^2(\zeta)}} \qquad (10)$$

terwijl voor $z > r_o$ ook de tweede integraal van (8) optreedt, zodat de integraalvergelijking (9) hier gebruikt moet worden. In (9) is $x < 0$ en $x + z > 0$, en wordt D' begrensd door $\zeta = 0$, $\xi = 0$ en $\xi + \zeta = x+z$; en D'' door $\xi + \zeta = 0$, $\xi - \zeta = x-z$, $\xi = 0$ en $\xi + \zeta = x+z$. Met nieuwe variabelen $\sigma = \zeta - \xi$ en $\tau = \zeta + \xi$, vinden we dat D' binnen $\sigma + \tau = 0$, $\tau - \sigma = 0$ en $\tau = x + z = \tau_1$ ligt, en D'' binnen $\tau = 0$, $\sigma = z - x = \sigma_1$, $\tau - \sigma = 0$ en $\tau = x + z = \tau_1$. Verg. (9) wordt dus

$$\int_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau_1-\tau}} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{f\,d\sigma}{\sqrt{\sigma_1-\sigma}} = -\int_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau_1-\tau}} \int_{\tau}^{\sigma_1} \frac{\psi_\eta\,d\sigma}{\sqrt{\sigma_1-\sigma}}$$

voor $x < 0$ en $z + x > 0$, d.w.z. voor $\sigma_1 > \tau_1$ en $\tau_1 > 0$. Aangezien dit voor alle $\tau_1 > 0$ geldt, volgt dat

$$\int_{-\tau}^{\tau} \frac{f\, d\sigma}{\sqrt{\sigma_1 - \sigma}} = - \int_{\tau}^{\sigma_1} \frac{\psi_\eta\, d\sigma}{\sqrt{\sigma_1 - \sigma}}, \text{ voor } \sigma_1 > \tau > 0. \qquad (11)$$

In het algemene geval (8) wordt D" begrensd door $\xi + \zeta = 0$, $\xi = 0$ en $z - \zeta = r(\xi)$, d.w.z. door $\tau = 0$, $\tau - \sigma = 0$ en $(\sigma_1 - \sigma)(\tau_1 - \tau) - y^2 = 0$. Dus

$$\iint_{D''} \frac{\psi_\eta\, d\xi\, d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2 - r^2(\xi)}} = \tfrac{1}{2} \int_0^{z-r_0} d\tau \int_{\tau}^{\sigma_1 - \frac{y^2}{\tau_1 - \tau}} \frac{\psi_\eta\, d\sigma}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma)(\tau_1 - \tau) - y^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^{z-r_0} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau_1 - \tau}} \int_{\tau}^{\sigma_1'} \frac{\psi_\eta\, d\sigma}{\sqrt{\sigma_1' - \sigma}} \quad \text{met } \sigma_1' = \sigma_1 - \frac{y^2}{\tau_1 - \tau}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \int_0^{z-r_0} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau_1 - \tau}} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{f\, d\sigma}{\sqrt{\sigma_1' - \sigma}}, \text{ volgens (11)}$$

$$= - \int_0^{z-r_0} f(\xi)\, d\xi \int_0^{z-r_0-\xi} \frac{d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2 - r^2(\xi)}}.$$

Dus wordt (8) nu, voor $z > r_0$:

$$\psi(x,y,z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{x+\sqrt{z^2-y^2}} f(\xi)\, d\xi \int_0^{z-r(\xi)} \frac{d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2 - r^2(\xi)}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{z-r_0} f(\xi)\, d\xi \int_0^{z-r_0-\xi} \frac{d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2 - r^2(\xi)}} \qquad (12)$$

Neem nu de Fourier-transform van ψ :

$$F(\psi) = -\frac{1}{\pi} \int_y^{r_0} e^{-ikz}\, dz \int_{x-\sqrt{z^2-y^2}}^{x+\sqrt{z^2-y^2}} f(\xi)\, d\xi \int_0^{z-r(\xi)} \frac{d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2 - r^2(\xi)}}$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} e^{-ikz}\, dz \left\{ \int_0^{x+\sqrt{z^2-y^2}} f(\xi)\, d\xi \int_0^{z-r(\xi)} \frac{d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2 - r^2(\xi)}} + \right.$$

$$\left. - \int_0^{z-r_0} f(\xi)\, d\xi \int_0^{z-r_0-\xi} \frac{d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2 - r^2(\xi)}} \right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)d\xi\left\{\int_{r(\xi)}^\infty e^{-ikz}\,dz\int_0^{z-r(\xi)}\frac{d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2-r^2(\xi)}}\,+\right.$$

$$\left.-\int_{r_0+\xi}^\infty e^{-ikz}\,dz\int_0^{z-r_0-\xi}\frac{d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2-r^2(\xi)}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)d\xi\left\{\frac{1}{ik}\int_{r(\xi)}^\infty e^{-ikz}\,dz.\frac{d}{dz}\int_0^{z-r(\xi)}\frac{d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2-r^2(\xi)}}\,+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{ik}\int_{r_0+\xi}^\infty e^{-ikz}\,dz\,\frac{d}{dz}\int_0^{z-r_0-\xi}\frac{d\zeta}{(z-\zeta)^2-r^2(\xi)}\right\}$$

$$= -\frac{1}{ik\pi}\int_0^\infty f(\xi)d\xi\int_{r(\xi)}^{r_0+\xi} e^{-ikz}\,\frac{dz}{\sqrt{z^2-r^2(\xi)}}$$

wat dus als oplossing φ van het buigingsprobleem voor een half vlak te voorschijn treedt. We kunnen deze ook zo schrijven:

$$\varphi(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi_\eta d\xi\left\{\int_{r(\xi)}^\infty e^{-ikz}\,\frac{dz}{\sqrt{z^2-r^2(\xi)}}\,+\right.$$

$$\left.-\int_{r_0+\xi}^\infty e^{-ikz}\,\frac{dz}{\sqrt{z^2-r^2(\xi)}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2i}\int_0^\infty \varphi_\eta d\xi\left\{H_0^{(2)}(kr)-\frac{2i}{\pi}\int_{r_0+\xi}^\infty e^{-ikz}\,\frac{dz}{\sqrt{z^2-r^2(\xi)}}\right\}.$$

Het blijkt dat de eerste term een Kirchhoff-benadering is, waarop de tweede als correctie-term werkt.

Als we voor het ongestoorde veld een normaal invallende vlakke golf $\quad \chi = e^{-iky+i\nu t}$

nemen, geldt $\quad \varphi_y = -\frac{\partial}{\partial y}\, e^{-iky}\Big|_{y=0} = ik \quad$ voor $0 < x < \infty$, $y = 0\pm$.

$$\therefore f(x) = -k^2.$$

Dan wordt de oplossing

$$\varphi(x,y) = -\frac{ik}{\pi}\int_0^\infty d\xi\int_{r(\xi)}^{r_0+\xi} e^{-ikz}\,\frac{dz}{\sqrt{z^2-r^2(\xi)}}$$

en we kunnen eenvoudig bewijzen dat deze gelijk is aan de oplossing van Sommerfel

$$\varphi(x,y) = -\, e^{ikz}\sqrt{\frac{i}{\pi}}\int_{\sqrt{2kr_o}\cos\frac{\theta}{2}}^{\infty} e^{-i\lambda^2}d\lambda + e^{-ikz}\sqrt{\frac{i}{\pi}}\int_{\sqrt{2kr_o}\sin\frac{\theta}{2}}^{\infty} e^{-i\lambda^2}d\lambda$$

waarin $x = r_o \sin\theta$ en $y = r_o \cos\theta$, d.w.z. $\sqrt{2r_o}\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{r_o + z}$ en $\sqrt{2r_o}\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{r_o - z}$.

6. Het eindige scherm.

We beperken ons tot een paar opmerkingen om aan te duiden hoe met deze methode een asymptotische benadering voor hoge frequenties in het geval van een eindig scherm kan worden verkregen.

Hier is $I = (-1,1)$ en het oppervlak $z = z_o(x,y)$ is

$$z = \begin{cases} |y| & \text{voor } |x| < 1 \\ r(-1) & \text{''} \quad x < -1 \\ r(1) & \text{''} \quad x > 1 \,. \end{cases}$$

Behalve $z = z_o$ treden hier echter ook nog verdere karakteristieke oppervlakken $z = z_n(x,y)$ op, waar de oplossing "knikken" maakt wegens "weerkaatsing" tussen de twee lijnen $r(\pm 1) = 0$.

In het gebied $0 < y < z < r(\pm 1)$ geldt formule (10); in gebieden $r(-1) < z < r(1)$, $r(1) < z < r(-1)$ en $r(\pm 1) < z < r(\pm) + 2$ gelden formules analoog aan (12), maar voor alle grotere waarden van z worden de formules ingewikkelder. De waarden van ψ_η in (8) moeten namelijk uit integraalvergelijkingen van de vorm van (11), die een vergelijking van Abel is, worden gevonden, en voor toenemende z, steeds opnieuw bij de overschrijding van elk oppervlak $z = z_n$, in vorige waarden worden uitgedrukt.

Door geschikte keuze kan de Fourier-transform geschreven worden als een reeks waarvan de termen van dalende orde in k zijn, d.w.z. als een asymptotische reeks in k.

De eerste termen van de oplossing zijn

$$\varphi(x,y) \sim -\frac{1}{2i}\int_{-1}^{1}\psi_\eta(\xi,o)\,d\xi\,\Big\{H_0^{(2)}(kr) - \frac{2i}{\pi}\int_{r(-1)+1+\xi}^{\infty} e^{-ikz}\frac{dz}{\sqrt{z^2 - r^2(\xi)}} - \frac{2i}{\pi}\int_{r(1)+1-\xi}^{\infty} e^{-ikz}\frac{dz}{\sqrt{z^2 - r^2(\xi)}} + \dots\Big\}.$$

Verwijzingen:

1. B.B. Baker en E.T. Copson: Huygens' principle, Oxford 1950.
2. P. Frank en R. Von Mises: Differential- und Integralgleichungen, II, New York 1943.
3. J. Meixner, Ann. der Phys. 6:6 ('49) 2-9.
4. B. Sieger, Ann.Phys.Leipzig 27 ('08) 626.
5. M.J.O. Strutt, Z.Phys. 69 ('31) 597-617.
6. J.C. Evvard, Naca report 951, Washington 1950.
7. W. Franz, Z.Phys. 128 ('50) 432-41.
8. J. Hadamard, Le Problème de Cauchy, Paris 1932.
9. M. Riesz, Acta Math. 81 ('49) 1-223.