STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1964-008

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

22 april 1964

Prof.dr. C.G. Lekkerkerker

Stapelen en overdekken van figuren in het platte vlak

1964

ZW 1964-008

Voordracht in de serie "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

22 april 1964

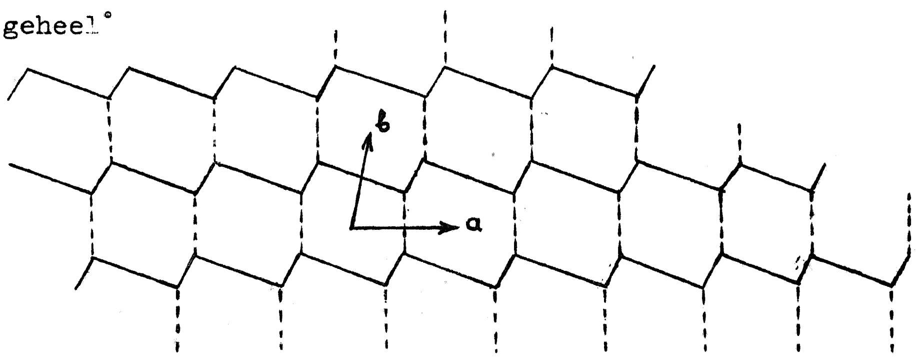
Stapelen en overdekken van figuren in het platte vlak

Prof.dr. C.G. Lekkerkerker.

0. We denken ons in het platte vlak een vast rechthoekig assenstelsel gekozen. Punten geven we aan met $x,y,z,a,b,\ldots$, de oorsprong met o. Met x bedoelen we ook de vector van o naar x. Onder $K+x$ verstaan we de figuur die uit een gegeven figuur K ontstaat door verschuiven over de vector x.

1. Zij K een symmetrische convexe zeshoek. Dan bestaat een rooster Λ zó dat het vlak juist opgevuld wordt door de zeshoeken $K+x$, $x \in \Lambda$.
Bewijs. Neem een vector a zó dat K en $K+a$ een zijde gemeen hebben. De zeshoeken $K+ma$ $(m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ vormen een strip, begrensd door twee oneindig lange gebroken lijnen die uit elkaar ontstaan door een verschuiving. Op elkaar stapelen van deze strips geeft de gewenste vlakvulling; de middelpunten der zo verkregen zeshoeken vormen een rooster $\Lambda = \{ma+nb\}_{m,n \text{ geheel}}$.

(honingraat of Wabe)



2. Zij G een begrensd convex gebied (gebied = figuur met inwendige punten, die bevat is in de afsluiting van zijn inwendige). Zij V_σ een vierkant met zijde σ en zij $\delta_\sigma(G)$ de dichtheid van de dichtste stapeling in V_σ van met G congruente figuren: $\delta_\sigma(G)$ totale oppervlakte figuren / oppervlakte van V_σ.

Dan heeft $\delta_\sigma(G)$ een limiet voor $\sigma \to \infty$.

<u>Bewijs.</u> Zij G bevat in een vierkant met zijde ρ. Zij $\omega_\sigma(G)$ de totale oppervlakte van de figuren uit de dichtste stapeling in V_σ, zodat $\delta_\sigma(G)=\omega_\sigma(G).\sigma^{-2}$. Zij nu σ groot en k een natuurlijk getal. Dan is

$$k^2\omega_\sigma(G) \leq \omega_{k\sigma}(G) \leq k^2.\left[\omega_\sigma(G)+(\sigma+2\rho)^2-(\sigma-2\rho)^2\right].$$

Bij deling door $(k\sigma)^2$ volgt

$$\delta_\sigma(G) \leq \delta_k\ (G) \leq \delta_\sigma(G)+\frac{8\rho}{\sigma}.$$

Dus $\delta_{k\sigma}(G)-\delta_\sigma(G)$ is klein, onafhankelijk van k, als maar σ voldoende groot is (bedenk dat ρ een vast getal is).

Een soortgelijk resultaat kan men afleiden als k niet geheel en ≥ 1 is. Dan volgt dat $\delta_\sigma(G)$ een limiet heeft voor $\sigma \to \infty$.

In het volgende hebben we speciaal te maken met dichtheden van roosterstapelingen. Hierbij is een roosterstapeling van G een collectie $\{G+x\}$, waarbij x <u>alle</u> punten uit een gegeven rooster doorloopt en de figuren G+x elkaar niet overlappen. Een roosterstapeling van G in een gebied W is de collectie van <u>alle</u> figuren G+x uit een gegeven roosterstapeling $\{G+x\}_{x\in\Lambda}$ van G, die in W bevat zijn. Zij speciaal W_σ een parallelogram met middelpunt in o en hoekpunten $\pm\sigma a\pm\sigma b$, waarbij a,b een basis van Λ vormen, en zij $\delta_\sigma(G,\Lambda)$ de dichtheid van de gegeven roosterstapeling $\{G+x\}_{x\in\Lambda}$ in W_σ. Dan heeft $\delta_\sigma(G,\Lambda)$ een limiet voor $\sigma \to \infty$; deze limiet - de fractie van het vlak dat bedekt wordt door de figuren G+x - heet de <u>dichtheid</u> van de roosterstapeling en is gelijk aan

$$\delta(G,\Lambda) = \frac{\text{opp } G}{d(\Lambda)},$$

waarbij $d(\Lambda)$ de determinant (maaswijdte) van het rooster Λ is.

Het bewijs van de laatste bewering wordt aan de lezer overgelaten.

3. Zij K een begrensd symmetrisch convex gebied. Laat een rooster Λ bestaan zó dat het vlak juist opgevuld wordt door de gebieden $K+x$, $x \in \Lambda$ (we noemen K dan vlakvullend). Dan is K een zeshoek (evt. een vierhoek = ontaarde zeshoek).

Bewijs. We mogen aannemen dat het middelpunt van K in o valt.

a) We beschouwen naast Λ het rooster $\frac{1}{2}\Lambda$, bestaande uit de punten $\frac{1}{2}x$, $x \in \Lambda$. We tonen allereerst aan:

Λ een stapelingsrooster voor $K \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\Lambda$ toegelaten voor K

(d.w.z. $\frac{1}{2}\Lambda$ heeft geen punt $\neq 0$ in int K = inwendige van K).

Stel eens dat $\frac{1}{2}\Lambda$ niet toegelaten is voor K. Dan heeft $\frac{1}{2}\Lambda$ een punt $\frac{1}{2}x \neq o$ in int K. Wegens de symmetrie van K is dan

$$-\tfrac{1}{2}x \in \text{int } K, \text{ dus } \tfrac{1}{2}x \in \text{int } (K+x).$$

Dus int K en int$(K+x)$ hebben een punt gemeen, nl. $\frac{1}{2}x$, zodat Λ geen stapelingsrooster voor K is.

Stel vervolgens dat K en $K+x$ elkaar overlappen, voor een zeker punt $x \neq o$ van Λ. Dan is er een punt y met

$$y \in \text{int } K,\ y \in \text{int } (K+x) \text{ ofwel } y-x \in \text{int } K.$$

Daar K symmetrisch en convex is, volgt

$$x-y \in \text{int } K,\ \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(y+(x-y)) \in \text{int } K.$$

Dus $\frac{1}{2}\Lambda$ is niet toegelaten voor K.

b) Uit de onderstellingen volgt dat K in elk geval een veelhoek is. Want elk randpunt van K behoort tot minstens één der overige figuren $K+x$ (we nemen nu gemakshalve aan dat K gesloten is). En als $K+x$ contact maakt met K, dan hebben deze twee figuren òf een punt òf een lijnsegment gemeen.

Het aantal zijden van de veelhoek K is even, omdat K symmetrisch is. Het inwendige van iedere zijde bevat een punt van $\frac{1}{2}\Lambda$. Anders konden we deze zijde, en zijn spiegelbeeld in o, iets opschuiven zó dat $\frac{1}{2}\Lambda$ toegelaten bleef; dan zou Λ stapelingsrooster zijn voor een figuur die K echt omvat, in strijd met het gegeven dat K vlakvullend is m.b.t. het rooster Λ.

c) We bewijzen tenslotte dat het aantal zijden van de veelhoek K ten hoogste 6 bedraagt. Zij $\Lambda = \{ma+nb\}_{m,n \text{ geheel}}$ en zij S de verzameling der punten $m.\frac{1}{2}a+n.\frac{1}{2}b \in \frac{1}{2}\Lambda$, die tot het inwendige van een zijde van K behoren. We verdelen de punten van S in 4 klassen, al naar de pariteit van m,n:

$$[ee] \,,\; [eo] \,,\; [oe] \,,\; [oo] \qquad (e=\text{even},\ o=\text{oneven}).$$

Uit het feit dat $\frac{1}{2}\Lambda$ toegelaten is voor K volgt gemakkelijk dat de eerste klasse leeg is. Als verder x,x' tot eenzelfde klasse behoren, dan is $\frac{1}{2}(x+x') \in \frac{1}{2}\Lambda \cap \text{int } K$, dus $= o$, zodat $x'=-x$. Dus de drie overige klassen bevatten ieder ten hoogste 2 punten. Wegens het onder b) gevondene is nu het aantal zijden van K hoogstens 6.

4. Zij thans K een willekeurig begrensd convex gebied, met o als middelpunt. We zijn geïnteresseerd in de <u>dichtste roosterstapeling</u> van K; de dichtheid daarvan geven we aan met $\delta(K)$. We hebben

$$\delta(K) = \frac{\text{opp } K}{\text{opp } H_0} \,,$$

waarbij H_0 de kleinste omgeschreven convexe zeshoek is, met middelpunt in o.

<u>Bewijs.</u> Zij H een willekeurige convexe zeshoek, met middelpunt in o, die K bevat. Dan bestaat een rooster Λ zó dat $\{H+x\}_{x\in\Lambda}$ een vlakvulling is. Het is een roosterstapeling met dichtheid 1, dus

$$\delta(H,\Lambda) = \frac{\text{opp } H}{d(\Lambda)} = 1.$$

Verder is a fortiori $\{K+x\}_{x\in\Lambda}$ een roosterstapeling; zijn dichtheid is

$$\delta(K,\Lambda) = \frac{\text{opp } K}{d(\Lambda)} = \frac{\text{opp } K}{\text{opp } H}.$$

Nemen we speciaal $H=H_0$, dan krijgen we een roosterstapeling van K met dichtheid opp K/opp H_0.

Zij vervolgens $\{K+x\}_{x\in\Lambda}$ een willekeurige roosterstapeling van K. We construeren een zeshoek H zó dat K bevat is in H en $\{H+x\}_{x\in\Lambda}$ een stapeling is. Bij ieder punt $x \neq o$ van Λ bestaat een getal $\alpha=\alpha_x > 0$ zó dat het punt $\alpha\circ x$ op de rand van K ligt. Laat L_x^* een steunlijn in $\alpha\cdot x$ aan K zijn en zij S_x de strook, begrensd door de rechten $\pm L_x = \pm \frac{1}{2\alpha} L_x^*$ welke gaan door de punten $\pm\frac{1}{2}x$ en evenwijdig zijn aan de steunlijn L_x. We stellen nu

$$H' = \bigcap_{x\neq o,\, x\in\Lambda} S_x.$$

In feite is H' de doorsnede van eindig veel stroken S_x, en dus een (o-symmetrische) veelhoek: de stroken behorende bij twee punten x,y die niet collineair zijn met o hebben als doorsnede een parallelogram, en dit parallelogram wordt niet gesneden door $\pm L_x$ als x voldoende ver weg ligt.

Daar $\frac{1}{2}\Lambda$ toegelaten is voor K (zie punt 3), is K bevat in iedere strook S_x, en dus in H'. Verder volgt uit de constructie dat voor geen enkel punt $x \neq o$ van Λ de veelhoeken H', H'+x elkaar overlappen: ze liggen in disjuncte stroken S_x, S_x+x. Dan is $\{H'+x\}_{x\in\Lambda}$ een stapeling. Bijgevolg is $\frac{1}{2}\Lambda$ toegelaten voor H'.

Mogelijk heeft een bepaalde zijde van H' geen punt van $\frac{1}{2}\Lambda$ in zijn inwendige. Dan verschuiven we deze zijde en zijn spiegelbeeld in o evenwijdig met zichzelf tot dit wel het geval is of tot ze verdwenen zijn. Herhalen we dit zo vaak als nodig is voor andere zijden, dan ontstaat een o-symmetrische veelhoek H met de volgende eigenschappen:

(i) H omvat H', en dus K

(ii) $\frac{1}{2}\Lambda$ is toegelaten voor H, en dus is $\{H+x\}_{x\in\Lambda}$ een stapeling

(iii) het inwendige van iedere zijde van H bevat een punt van $\frac{1}{2}\Lambda$.

Uit (iii) volgt als in punt 3 dat H een zeshoek (evt. vierhoek) is. Uit (ii) volgt dat opp $H/d(\Lambda) = \delta(H,\Lambda) \leq 1$. Wegens (i) is opp H $\geq$ opp H_0. Dan hebben we

$$\delta(K,\Lambda) = \frac{\text{opp } K}{d(\Lambda)} \leq \frac{\text{opp } K}{\text{opp } H} \leq \frac{\text{opp } K}{\text{opp } H_0}.$$

Hiermee is het bewijs voltooid.

N.B. Voor de geconstrueerde zeshoek H hoeft niet te gelden dat $\{H+x\}_{x\in\Lambda}$ een vlakvulling is.

5. Zij weer K een begrensd convex gebied, met middelpunt o. Zij Λ een

rooster zó dat het vlak overdekt wordt door de figuren $K+x, x\in\Lambda$. Dan heet Λ een overdekkingsrooster van K, terwijl

$$\vartheta(K,\Lambda) = \frac{\text{opp } K}{d(\Lambda)}$$

de <u>dichtheid</u> van de roosteroverdekking $\{K+x\}_{x\in\Lambda}$ is.

De dichtheid van de dunste roosteroverdekking $\{K+x\}_{x\in\Lambda}$ is gelijk aan

$$\vartheta(K) = \frac{\text{opp } K}{\text{opp } H_1} ,$$

waarbij H_1 de grootste in K ingeschreven convexe zeshoek is, met middelpunt in o.

<u>Bewijs.</u> Zij x een punt $\neq o$ van Λ, waarvoor K en $K+x$ elkaar overlappen. Dan snijden de randen van K en $K+x$ elkaar, in twee punten of volgens twee lijnsegmenten. We nemen nu een rechte L die deze twee punten, c.q. de middens van deze lijnsegmenten verbindt en vormen de doorsnede K_1 van K en de strook, begrensd door de rechten L en $L-x$. Dan heeft K_1 weer middelpunt o en is $\{K_1+x\}_{x\in\Lambda}$ weer een roosteroverdekking van het vlak.

Herhaling van dit procédé levert na eindig veel stappen een convexe figuur H, die bevat is in K en middelpunt in o heeft, terwijl $\{H+x\}_{x\in\Lambda}$ een vlakvulling is. Uit dit feit volgt de bewering.

Na het voorgaande is duidelijk dat $\delta(K)$ maximaal en wel gelijk aan 1 is en dat $\vartheta(K)$ minimaal en wel gelijk aan 1 is, dan en slechts dan als K een (o-symmetrische, convexe) zeshoek of vierhoek is.

6. Men kan het probleem stellen voor welke figuren K de dichtheid $\delta(K)$ minimaal, of de dichtheid $\vartheta(K)$ maximaal is. Op de kwestie dat $\delta(K)$ en $\vartheta(K)$, die in zekere zin continu van K afhangen, een minimum, resp. maximum op de collectie der K aannemen, gaan we hier niet in.

Voor $\vartheta(K)$ is dit probleem opgelost. En wel is $\vartheta(K)$ maximaal, en daarbij gelijk aan $(\frac{6}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{6})^{-1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, dan en slechts dan als K een ellips is. Dus de minst economische roosteroverdekking van het platte vlak is die door cirkels (ellipsen).

Voor $\delta(K)$ is het probleem niet opgelost. In elk geval is een cirkel (ellips) géén figuur van dunste dichtste roosterstapeling. Wel moet zo'n figuur een rand zonder hoekpunten hebben.

Men gaat gemakkelijk na hoe een dichtste roosterstapeling van een cirkel er uit ziet en vindt dan dat $\delta(C) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0{,}9069\ldots$. Voor een regelmatige achthoek P_8 bepalen we $\delta(P_8)$ door een zeshoek te beschouwen waarvan de zijden langs drie paar overstaande zijden van P_8 vallen. Een eenvoudige berekening levert nu $\delta(P_8) = \frac{4}{7}(3-\sqrt{2}) = 0{,}9062\ldots$. Dus

$$\delta(P_8) < \delta(C).$$

Door de hoeken van P_8 op een geschikte wijze af te ronden, krijgt men een figuur met nog kleinere δ-waarde.

Literatuur

L. Fejes Tóth, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum (Springer 1953).

K. Mahler, On the minimum determinant and the circumscribed hexagons of a convex domain, Proc.Kon. Ned.Akad. Wet. 50, 692-703(1947).