STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1967-008

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"
door
Prof.dr. E.M. de Jager (T.H. Twente)

Algebra en Rekenen

1. Inleiding

In deze lezing zullen we laten zien, dat de elementaire rekenkundige bewerkingen van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met succes toegepast kunnen worden op getalrijen. Dit is mogelijk doordat we deze getalrijen tezamen met de voor hen gedefinieerde rekenkundige bewerkingen beschouwen vanuit het "hoger standpunt" van de algebra.
We zullen de bruikbaarheid van deze algebra laten zien, doordat vele elementaire berekeningen metterdaad uitgevoerd zullen worden en tevens zal worden aangetoond dat lineaire differentievergelijkingen eenvoudig opgelost kunnen worden met behulp van de zogenaamde partiele breuksplitsing. Voorbeelden en toepassingen zullen de tekst verduidelijken.
Voor literatuur zij de lezer verwezen naar een boek van Fenyö en Frey, dat een inleiding geeft tot meer moderne wiskunde voor ingenieurs en dat binnenkort zal verschijnen bij de Noord Hollandse Uitg. Mij. te Amsterdam. Verder zij nog vermeld Lothar Berg, Introduction to the Operational Calculus, Ch. II, North. Holl. Publ. Comp. Amsterdam, 1967.
De in deze voordracht behandelde rekenwijze is een bijzonder geval van de bekende operatorenrekening van Jan Mikusinski (Operatorenrechnung,

Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1957). Deze operatorenrekening is in wezen een algebra voor "stuksgewijs" continue functies. Indien men in plaats van deze functies, die van een continue variabele afhangen, functies van een discrete variabele beschouwt, dan krijgt men rijen en de operatorenrekening van J. Mikusinski gaat over in de algebra voor rijen, die het onderwerp van deze voordracht zal zijn. Voor een korte inleiding tot de operatorenrekening zij tenslotte nog verwezen naar de vakantiecursus, 1964, van het Mathematisch Centrum.

2. De ring van de getalrijen

We beschouwen de ring R van alle oneindige rijen van complexe getallen. Een getalrij wordt aangegeven door de symbolen $a(n)$, $\{a_n\}$, $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ of kortweg a, terwijl één enkel getal uit de rij door a_n wordt voorgesteld. De getalrij $(0, 0, 0, \ldots)$ wordt met het symbool 0 aangeduid.

De ring R wordt nu met behulp van de volgende rekenregels nader gedefinieerd:

1e. gelijkheid

(2.1) $\quad a(n) = b(n)$, dan en alleen dan, indien $a_n = b_n$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$

2e. optelling:

(2.2) $\quad a(n) + b(n) = \{a_n\} + \{b_n\} \overset{\text{def}}{=} \{a_n + b_n\}.$

3e. vermenigvuldiging:

(2.3) $\quad a(n) * b(n) \overset{\text{def}}{=} \left\{\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right\}.$

Deze vermenigvuldiging is als een soort convolutieproduct op te vatten.

4e. vermenigvuldiging van een scalar (complex getal):

(2.4) $\quad c a(n) \overset{\text{def}}{=} \{c a_n\}.$

Na een weinig rekenen wordt het duidelijk dat deze optelling en vermenigvuldiging commutatief en associatief is; verder is de vermenigvuldiging distributief.

De ring R heeft de belangrijke eigenschap geen nuldelers te bezitten, d.w.z. uit $a(n) * b(n) = 0$ volgt, dat minstens één der factoren nul is.

Bewijs:

Stel geen der factoren a(n) en b(n) zijn nul.
Hieruit volgt, dat er een a_p en b_q is, die beiden ongelijk nul zijn; we nemen de indices p en q minimaal.
Nu geldt:

$$(a * b)_{p+q} = \sum_{j=0}^{p+q} a_{p+q-j} . b_j = a_p b_q = 0,$$

en derhalve $a_p = 0$ of $b_q = 0$, hetgeen in strijd is met het onderstelde.

Voorbeelden

1. $\delta = (1, 0, 0, \ldots)$

(2.5) $$a * \delta = \delta * a = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \delta_j \right\} = \{a_n\} = a.$$

De rij δ is het éénheidselement in de ring R.

2. $p = (0, 1, 0, 0, \ldots)$

(2.6) $$p * a = \left\{ \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} a_j \right\} = (0, a_0, a_1, \ldots)$$

$p *$ is een verschuivingsoperatie; deze operatie schuift de rij $\{a_n\}$ één plaats naar rechts.

Uit (2.6) volgt

$$p^k = \{p_n^k\} \text{ met } p_n^k = 0 \text{ voor } n \neq k \text{ en } p_n^k = 1 \text{ voor } n = k.$$

(2.7) $$p^k * a = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k \text{ plaatsen}}, a_0, a_1, \ldots)$$

3. $\mathbb{1} = (1, 1, 1, \ldots)$

(2.8) $$\mathbb{1} * a = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j \right\}.$$

(2.9) $$\mathbb{1}^2 = \{n + 1\}.$$

(2.10) $$\mathbb{1}^3 = \left\{ \binom{n+2}{2} \right\}$$

. . . .

(2.11) $$\mathbb{1}^k = \left\{ \binom{n+k-1}{k-1} \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(2.11) kan bewezen worden met behulp van volledige inductie, waarbij van (2.8) gebruik gemaakt wordt.

3. Het quotiëntenlichaam van de getalrijen

Omdat de ring R van de getalrijen geen nuldelers bevat, kan R uitgebreid worden tot een quotiëntenlichaam F.
Dit geschiedt geheel analoog aan de uitbreiding van de ring van de gehele getallen tot het lichaam van de rationale getallen.
In de elementaire rekenkunde worden voor breuken (paren van gehele getallen) de volgende definities van gelijkheid en van de bewerkingen van optellen en vermenigvuldigen gegeven:

(3.1) 1e. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a.d = b.c,\ b \neq o$ en $d \neq 0$.

(3.2) 2e. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$, $b \neq 0$ en $d \neq 0$.

(3.3) 3e. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$, $b \neq 0$ en $d \neq 0$.

Het gehele getal a wordt met de "breuk" $\frac{a}{1}$ geïdentificeerd.
De elementen van het quotiëntenlichaam F worden aangeduid door

$$a/b = a(n)/b(n) \qquad (a,\ b \in R,\ b \neq 0)$$

en zij zullen voortaan operatoren genoemd worden.
Een getalrij a(n) wordt geïdentificeerd met de operator:

(3.4) $a(n)/\delta$.

De definities (3.1), (3.2) en (3.3) worden nu in F:

(3.5) 1e $a/b = c/d \iff a * d = b * c,\ b \neq 0,\ d \neq 0$.

(3.6) 2e. $a/b + c/d = (a * d + b * c)/b * d,\ b \neq 0,\ d \neq 0$.

(3.7) 3e. $(a/b) * (c/d) = (a * c)/(b * d),\ b \neq 0,\ d \neq 0$.

We moeten echter nog toevoegen de volgende definitie voor de vermenigvuldiging met een scalar α:

(3.8) 4e. $\alpha.(a/b) = (\alpha.a)/b$.

Iedere getalrij is een operator, maar niet iedere operator is een getalrij, bijv. δ/p.
Stel δ/p was een getalrij a(n), dan zou gelden:

$$\delta/p = a/\delta$$

ofwel $\qquad \delta * \delta = \delta = a * p = (0, a_0, a_1, \ldots),$

hetgeen tot een tegenspraak leidt, omdat $1 \neq 0$ is.
Gezien de volledige analogie tussen operatoren en breuken mogen we met operatoren op dezelfde wijze rekenen als met breuken.

4. De differentieoperator.

Een belangrijke operator is de operator δ/l.
l is op te vatten als een "sommeringsoperator", immers

$$l * a = \{\sum_{j=0}^{n} a_j\}.$$

Het is daarom te verwachten, dat δ/l een differentieoperator is en dit blijkt in de volgende betekenis waar te zijn.
Stel

$$\Delta a(n) = a(n+1) - a(n) = \{a_{n+1} - a_n\},$$

dan is

$$l * \Delta a = \{\sum_{j=0}^{n} (a_{j+1} - a_j)\} = \{a_{n+1} - a_0\}$$

$$= a(n+1) - a_0 . l(n),$$

waaruit volgt:

(4.1) $\qquad \Delta a(n) = a(n+1)/l - a_0 . \delta.$

5. Verschuivingsoperatoren.

In paragraag 2 hebben we reeds de operator p gedefinieerd.

$$p = (0, 1, 0, 0, \ldots),$$

die de eigenschap heeft, dat

(5.1) $\qquad p^\mu * a(n) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\mu \text{ plaatsen}}, a_0, a_1, \ldots),\ \mu$ geheel $\mu > 0$

De operatie $p^\mu *$ schuift de rij $\{a_n\}$ μ plaatsen naar rechts.
Voor $\nu < 0$ definiëren we:

(5.2) $\qquad p^\nu = \delta/p^{-\nu},$

en verder

(5.3) $\qquad p^0 = \delta.$

De operatoren p^ν voldoen voor <u>gehele</u> waarden van ν aan de relatie

(5.4) $$p^{\lambda} * p^{\mu} = p^{\lambda+\mu}.$$

Bewijs:

Uit (5.1), (5.2) en (5.3) volgt onmiddellijk, dat (5.4) waar is voor $\lambda \geq 0$ èn $\mu \geq 0$, en voor $\lambda \leq 0$ èn $\mu \leq 0$.

Uit (5.2) volgt
$$p^{\mu} * p^{-\mu} = \delta,$$
voor alle gehele waarden van μ.

Stel nu $\lambda > 0$ en $\mu < 0$ en $\lambda + \mu > 0$; derhalve
$$p^{\lambda+\mu} * p^{-\mu} = p^{\lambda},$$
en dus
$$p^{\lambda} * p^{\mu} = p^{\lambda+\mu}.$$

Voor het geval $\lambda + \mu < 0$ mogen we schrijven
$$p^{\lambda+\mu} * p^{-\lambda} = p^{\mu},$$
en dus
$$p^{\lambda} * p^{\mu} = p^{\lambda+\mu}.$$

Hiermee is formule (5.4) volledig bewezen.

Om de operator $p^{-\nu}$ met $\nu > 0$ nader te karakteriseren stellen we ons de vraag, onder welke voorwaarden, aan de getalrij $a(n)$ op te leggen, is $p^{-\nu} * a(n)$ wederom een getalrij $b(n)$.
$$p^{-\nu} * a(n) = b(n),$$
en derhalve

(5.5) $$a(n) = p^{\nu} * b(n) = (\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{\nu \text{ plaatsen}},\ b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots)$$

Dus $p^{-\nu} * a(n)$ met $\nu > 0$ is alleen dan een getalrij, indien

(5.6) $$a_j = 0 \text{ voor } 0 \leq j \leq \nu - 1.$$

Uit (5.1) volgt ook omgekeerd: indien $a_j = 0$ voor $0 \leq j \leq \nu - 1$, dan is $p^{-\nu} * a(n)$ een getalrij.

Derhalve $p^{-\nu} * a(n)$ is dan en alleen dan een getalrij indien $a_j = 0$ is voor $0 \leq j \leq \nu - 1$.

Voldoet de getalrij $a(n)$ aan de conditie (5.6) dan geldt verder

(5.7) $$p^{-\nu} * a(n) = a(n + \nu).$$

De operator $p^{-\nu}$ verschuift in dit geval de getallenrij $\{a_n\}$ ν plaatsen naar links.

We beschouwen nu het algemene geval, dat de getalrij a(n) niet aan de conditie (5.6) voldoet.

We vormen nu de getalrij:

$$c(n) = a(n) - a_0.\delta - a_1.p - a_2.p^2 - \ldots - a_{\nu-1}p^{\nu-1}$$

c(n) voldoet nu aan de conditie (5.6) en dus:

$$p^{-\nu} * c(n) = p^{-\nu} * a(n) - a_0.p^{-\nu} - a_1.p^{1-\nu} - \ldots - a_{\nu-1}.p^{-1}$$

$$= c(n+\nu) = a(n+\nu).$$

Dus voor iedere getalrij geldt:

(5.8) $$p^{-\nu} * a(n) = a(n+\nu) + \sum_{j=0}^{\nu-1} a_j p^{j-\nu}.$$

Toepassingen.

1. Voor $\alpha \neq 0$

$$p^{-1} * \{\alpha^n\} = \{\alpha^{n+1}\} + p^{-1}$$

$$= \alpha\{\alpha^n\} + p^{-1}$$

ofwel

$$\{\alpha^n\} * (\delta - \alpha p) = \delta$$

en derhalve

(5.9) $$\delta/(\delta - \alpha p) = \{\alpha^n\}.$$

In het bijzondere geval $\alpha = 1$ krijgen we:

(5.10) $$\delta/(\delta - p) = 1.$$

Hieruit volgt nu verder met behulp van (2.11)

(5.11) $$\delta/(\delta - p)^k = 1^k = \{\binom{n+k-1}{k-1}\}, \; k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Na enig overleg vindt men uit (5.9) het analoge resultaat

(5.12) $$\delta/(\delta - \alpha p)^k = \{\alpha^n\}^k = \{\binom{n+k-1}{k-1}\alpha^n\}, \; k = 1, 2, 3, \ldots \text{ en } \alpha \neq 0.$$

2. Voor $\alpha = c^\beta$ volgt uit (5.9)

(5.13) $$\delta/(\delta - c^\beta p) = \{c^{n\beta}\}.$$

Met behulp hiervan verifieert men gemakkelijk de volgende relaties:

$$(5.14)\quad \begin{cases} \sin\beta.p/(\delta - 2\cos\beta.p + p^2) = \{\sin n\beta\}, \\ \sinh\beta.p/(\delta - 2\cosh\beta.p + p^2) = \{\sinh n\beta\}, \\ (\delta - \cos\beta.p)/(\delta - 2\cos\beta.p + p^2) = \{\cos n\beta\}, \\ (\delta - \cosh\beta.p)/(\delta - 2\cosh\beta.p + p^2) = \{\cosh n\beta\}, \end{cases}$$

en

$$(5.15)\quad \delta/(\delta - c^{\beta}p)^k = \{c^{n\beta}\}^k = \{\binom{n+k-1}{k-1} c^{n\beta}\},\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

6. De differentieoperator en de verschuivingsoperator.

Passen we (5.8) met $\nu = 1$ toe op (4.1) dan kwijgen we:

$$\Delta a(n) = a(n+1)/1 - a_0.\delta$$
$$= a(n)/(p * 1) - a_0\delta/(p * 1) - a_0.\delta.$$

Stellen we de operator:

$$(6.1)\quad \delta/(p * 1) = q,$$

dan wordt het resultaat

$$(6.2)\quad \Delta a(n) = q * a(n) - a_0.(q + \delta).$$

Met behulp van volledige inductie vinden we vervolgens:

$$(6.3)\quad \Delta^k a(n) = \Delta^{k-1}(\Delta a(n))$$
$$= q^k * a(n) - [\sum_{j=0}^{k-1} (\Delta^j a)_0\, q^{k-1-j}] * (q + \delta),$$
$$(k = 1, 2, 3, \dots).$$

Er bestaat een zeer eenvoudig en nuttig verband tussen de operator q en de verschuivingsoperator p.

$$p * 1 = (0, 1, 1, 1, \dots)$$

en derhalve

$$(6.4)\quad q + \delta = (\delta + p * 1)/(p * 1) = 1/(p * 1) = p^{-1}.$$

Toepassingen

1. $$\delta/(q - \alpha.\delta) = \delta/(q + \delta - (\alpha + 1).\delta) = \delta/(p^{-1} - (\alpha + 1).\delta)$$
$$= p/(\delta - (\alpha + 1)p).$$

Met behulp van (5.9) vinden we nu voor $\alpha \neq -1$:

$$(6.5) \qquad \delta/(q - \alpha\delta) = p * \{(1+\alpha)^n\}.$$

Voor $\alpha = -1$ volgt onmiddellijk uit (6.4)

$$(6.6) \qquad \delta/(q + \delta) = p.$$

Op soortgelijke wijze als in (5.12) krijgen we:

$$(6.7) \qquad \delta/(q - \alpha\delta)^k = p^k * \{(1 + \alpha)^n\}^k$$
$$= p^k * \{\binom{n+k-1}{k-1}(1 + \alpha)^n\}, \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

2. Uit (6.4), (6.1) en (2.11) volgt:

$$(6.8) \qquad (q + \delta)^k/q^k = (p * q)^{-k} = 1^k = \{\binom{n+k-1}{k-1}\}, \; k = 1, 2, 3, \ldots .$$

7. Twee nuttige ontwikkelingsstellingen

Hulpstelling

Indien $P(z)$ en $Q(z)$ willekeurige polynomen zijn, terwijl $P(z)$ geen wortels gelijk aan nul heeft, dan is de operator

$$(7.1) \qquad \omega = Q(p)/P(p)$$

een getalrij.

Bewijs:

Het is geoorloofd $Q(p)/P(p)$ als een gewoon quotient op te vatten en de deling volgens de elementaire algebra uit te voeren; ω kan dus geschreven worden als:

$$\omega = S(p) + R(p)/P(p),$$

waarin $S(p)$ en $R(p)$ polynomen zijn in p. maar de laatste heeft een graad, die lager is dan die van $P(p)$.

Uit de definitie van p volgt onmiddellijk dat $S(p)$ een getalrij is en we moeten dus nog aantonen, dat $R(p)/P(p)$ een getalrij is.

Stel

$$R(p) = \sum_{j=0}^{l} r_j p^j \text{ en } P(p) = \sum_{j=0}^{m} c_j p^j \text{ met } l < m \text{ en } c_0 \neq 0$$

(geen der wortels van $P(z)$ is gelijk aan nul).

Verder nemen we aan dat $P(z)$ s verschillende wortels ζ_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$

heeft, ieder met multipliciteit ν_i.
Met R(p)/P(p) mag op dezelfde wijze gerekend worden als met quotienten van polynomen en we kunnen derhalve R(p)/P(p) in partieelbreuken splitsen.

$$(7.2)\qquad R(p)/P(p) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{\nu_i} A_{ij} \;/(p - \zeta_i\delta)^j.$$

Omdat $\zeta_i \neq 0$ is mag dit herleid worden tot:

$$(7.3)\qquad R(p)/P(p) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{\nu_i} (-1)^j A_{ij}\; \eta_i^{\,j}\; \delta/(\delta - \eta_i p)^j$$

met $\eta_i = \dfrac{1}{\zeta_i}$.

Substitueren we in het rechterlid van (7.3) tenslotte de relatie (5.12), dan vinden we:

$$(7.4)\qquad R(p)/P(p) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{\nu_i} (-1)^j A_{ij}\; \eta_i^{\,j}\; \left\{\binom{n+j-1}{j-1}\eta_i^{\,n}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{\nu_i} (-1)^j A_{ij}\; \left\{\binom{n+j-1}{j-1}\eta_i^{\,n+j}\right\},$$

hetgeen evident een getalrij is.

<u>Stelling I</u>
Indien P(z) en Q(z) willekeurige polynomen zijn, terwijl de graad van Q(z) hoogstens gelijk is aan die van P(z), dan is de operator

$$(7.5)\qquad \omega = Q(p^{-1})/P(p^{-1})$$

een getalrij.
<u>Bewijs</u>:
Stel $P(z) = \sum_{j=0}^{m} c_j z^j,\ c_m \neq 0$, en

$\qquad Q(z) = \sum_{j=0}^{l} d_j z^j,\ d_l \neq 0,\ l \leq m.$

Wegens eigenschap (5.4) van de operatoren p^ν met ν geheel, zowel positief als negatief, mogen we (7.5) brengen in de gedaante:

$$(7.6)\qquad \omega = \left[\sum_{j=0}^{l} d_j p^{m-j}\right] / \left[\sum_{j=0}^{m} c_j p^{m-j}\right].$$

Omdat $\sum\limits_{j=0}^{m} c_j z^{m-j}$ geen wortel heeft, die gelijk is aan nul is ($c_m \neq 0$), is de operator ω volgens de hulpstelling een getalrij. Deze getalrij kan gemakkelijk bepaald worden door (7.6) in partieelbreuken te splitsen en vervolgens (7.2) - (7.4) toe te passen.

Stelling II.

Indien $P(z)$ en $Q(z)$ willekeurige polynomen zijn, terwijl de graad van $Q(z)$ hoogstens gelijk is aan die van $P(z)$, dan is de operator

$$\omega = Q(q)/P(q) \tag{7.7}$$

een getalrij.

Bewijs:

Stel $P(z) = \sum\limits_{j=0}^{m} c_j z^j$, $c_m \neq 0$, en

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{m} d_j z^j.$$

Door de rekenregels van de algebra toe te passen mogen we (7.7) schrijven in de gedaante:

$$\omega = \frac{d_m}{c_m}\,\delta + Q_1(q)/P(q),$$

waarin de graad van Q_1 lager is dan die van P.

Stel $P(z)$ heeft s verschillende wortels ζ_i ($i = 1, 2, \ldots, s$), ieder met multipliciteit ν_i.

Partieelbreuksplitsing en toepassing van (6.7) levert nu:

$$\omega = \frac{d_m}{c_m}\,\delta + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\nu_i} A_{ij}\,\delta/(q - \zeta_i\delta)^j$$

$$= \frac{d_m}{c_m}\,\delta + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\nu_i} A_{ij}\,p^j * \left\{\binom{n+j-1}{j-1}(1+\zeta_i)^n\right\}, \tag{7.8}$$

waarin de factor $\left\{\binom{n+j-1}{j-1}(1+\zeta_i)^n\right\}$ voor $\zeta_i = -1$ als δ geïnterpreteerd wordt, (zie formule (6.6)).

Uit het rechterlid (7.8) volgt nu onmiddellijk, dat ω een getalrij is.

8. De oplossing van lineaire differentievergelijkingen met constante coefficienten

Het vraagstuk de oplossing te bepalen van differentievergelijkingen met constante coëfficiënten kan op de volgende twee gelijkwaardige manieren gedefiniëerd worden:

a. Gevraagd de getalrij $f(n)$ te bepalen, die voldoet aan de vergelijking:

(8.1) $$c_m f(n+m) + c_{m-1} f(n+m-1) + \dots + c_0 f(n) = g(n)$$

met de gegeven "randwaarden" $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$.

b. Gevraagd de getalrij $f(n)$ te bepalen, die voldoet aan de vergelijking:

(8.2) $$d_m \Delta^m f(n) + d_{m-1} \Delta^{m-1} f(n) + \dots + d_0 f(n) = g(n)$$

met de gegeven "beginwaarden" $f_0, (\Delta f)_0, \dots, (\Delta^{m-1} f)_0$.

De coëfficiënten $c_0, \dots, c_m$ en $d_0, \dots, d_m$ zijn gegeven constanten en het rechterlid $g(n)$ is een gegeven getalrij.
Het is duidelijk, dat de problemen (8.1) en (8.2) na het uitvoeren van elementaire algebraische berekeningen in elkaar overgevoerd kunnen worden. We zullen dit hier niet doen, omdat de stellingen I en II ons een charmante algebraïsche methode geven om de problemen a respectievelijk b op geheel analoge wijze op te lossen.

a. Oplossing van het probleem (8.1).
Toepassing van de formule (5.8) voor de verschuivingsoperator p geeft:

(8.3) $$(c_m . p^{-m} + c_{m-1} . p^{-m+1} + \dots + c_0 . \delta) * f(n) = g(n) + \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=0}^{i-1} f_j . p^{j-i}.$$

We stellen:

(8.4) $$\sum_{j=0}^{m} c_j p^{-j} = P(p^{-1}),$$ (van de graad m in p^{-1}),

en

(8.5) $$\sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=0}^{i-1} f_j . p^{j-i} = Q(p^{-1}),$$ (hoogstens van de graad m in p^{-1}). (Q is van lagere graad dan P indien f_0 gelijk aan nul is).

Substitutie van (8.4) en (8.5) in (8.3) geeft onmiddellijk:

(8.6) $$f(n) = g(n) * \delta/P(p^{-1}) + Q(p^{-1})/P(p^{-1}).$$

Uit de stelling I van de vorige paragraaf volgt nu, dat de beide termen

van het rechterlid van (8.6) getalrijen zijn; deze getalrijen kunnen met behulp van partieelbreuksplitsing geconstrueerd worden en daarmee is de rij f(n) volledig bepaald.
We vinden een algemene formule voor het n^e element van de rij f(n).

b. Oplossing van het probleem (8.2).
Toepassing van de formule (6.3) voor het vormen van differenties geeft:

$$(d_m . q^m + d_{m-1} . q^{m-1} + \ldots + d_0 . \delta) \ast f(n) =$$

(8.7) $$g(n) + \left[\sum_{i=1}^{m} d_i \sum_{j=0}^{i-1} (\Delta^j f)_0 . q^{i-1-j}\right] \ast (q + \delta).$$

We stellen:

(8.8) $$\sum_{j=0}^{m} d_j . q^j = P(q), \text{ (van de graad m)},$$

en

(8.9) $$\left[\sum_{i=1}^{m} d_i \sum_{j=0}^{i-1} (\Delta^j f)_0 . q^{i-1-j}\right] \ast (q + \delta) = Q(q), \text{ (hoogstens}$$

van de graad m). (Q is van lagere graad dan P, indien f_0 gelijk aan nul is.).
Substitutie van (8.8) en (8.9) in (8.7) levert onmiddellijk:

(8.10) $$f(n) = g(n) \ast \delta/P(q) + Q(q)/P(q).$$

Uit de stelling II van paragraaf 7 volgt, dat beide termen van het rechterlid van (8.10) getalrijen zijn; deze getalrijen kunnen met behulp van partieelbreuksplitsing geconstrueerd worden en daarmee is de rij f(n) volledig bepaald; voor het n^e element van f(n) kan een algemene formule gegeven worden.

9. Voorbeelden en toepassingen

1. De getallen van Fibonaci.

Indien de functie

$$f(t) = \frac{t}{1-t-t^2}$$

voor $t < \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ de machtreeksontwikkeling $\sum_0^\infty a_n t^n$ bezit, dan volgt uit

$$t + t\, f(t) + t^2 f(t) = f(t)$$

voor a_n de recurrente betrekking:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

met $a_0 = 0$ en $a_1 = 1$.

De getallen a_n heten de getallen van Fibonaci (bijnaam voor Leonardo van Pisa, $\pm$ 1200) en zij worden door de functie f(t) voortgebracht. We zullen deze getallen a_n met behulp van de behandelde theorie berekenen. De rij a(n) voldoet aan de differentievergelijking:

$$a(n + 2) = a(n + 1) + a(n) \tag{9.1}$$

met randwaarde $a_0 = 0$ en $a_1 = 1$.

Volgens (8.1) en (8.3):

$$(p^{-2} - p^{-1} - \delta) * a(n) = p^{-1}$$

ofwel

$$\begin{aligned} a(n) &= p/(\delta - p - p^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\delta/(\delta - \frac{\sqrt{5}+1}{2}p) - \frac{1}{\sqrt{5}}\delta/(\delta + \frac{\sqrt{5}-1}{2}p). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Toepassing van (5.9) levert:

$$a(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\} - \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\}. \tag{9.3}$$

2. We beschouwen de differentievergelijking:

$$\Delta^3 f(n) = 0 \tag{9.4}$$

met de beginwaarden:

$$f_0 = 0,\ (\Delta f)_0 = 0 \text{ en } (\Delta^2 f)_0 = 1$$

en we vragen f(n) te berekenen.

Toepassing van (8.2) en (8.7) geeft

$$q^3 * f(n) = q + \delta.$$

Dus

$$\begin{aligned} f(n) &= q^{-2} + q^{-3} = p^2 * 1^2 + p^3 * 1^3 \\ &= p^2 * \{(m+1)\} + p^3 * \{\binom{n+2}{2}\}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

(vgl. (6.1), (2.9) en (2.10)).

Gebruiken we nu de schuifeigenschap van p dan vinden we:

$$(9.6) \qquad f_n = \begin{cases} 0 & \text{voor } n = 0,\ 1 \\ 1 & \text{voor } n = 2 \\ (n-1) + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{2} & \text{voor } n = 3,\ 4,\ \dots \end{cases}$$

3. Bepaal de algemene oplossing van

$$(9.7) \qquad \Delta f(n) = g(n).$$

Volgens (8.2) en (8.7):

$$q * f(n) = g(n) + f_0.(q + \delta),$$ waarin f_0 een willekeurige constante mag zijn; derhalve

$$\begin{aligned} f(n) &= g(n)/q + f_0(\delta + q^{-1}) \\ &= g(n) * p * 1 + f_0(\delta + p * 1) \\ &= p * 1 * g(n) + f_0(\delta + p * 1). \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$(9.8) \qquad f_n = f_0 + \sum_{j=0}^{n-1} g_j, \quad n = 1, 2, \dots .$$

4. De berekening van een stroomketen.

In de electrotechniek komen stroomketens voor, die uit een serie geschakelde eenheden bestaan, waarvan er één in figuur 1 schematisch is weergegeven. Het is van belang de spanningen en de stroomsterkten in iedere eenheid te berekenen.

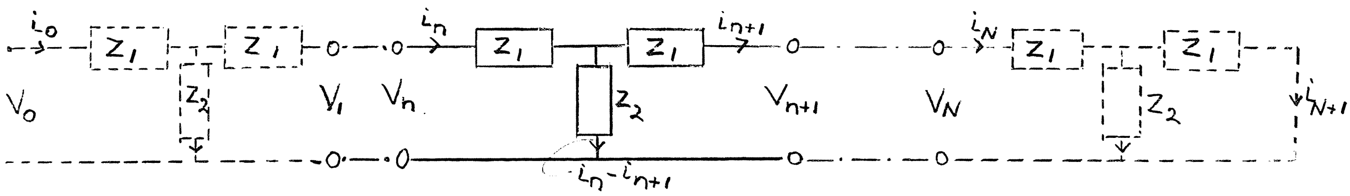

fig. 1

In figuur 1 is de n^e eenheid door getrokken lijnen weergegeven. Z_1 en Z_2 zijn gegeven weerstanden, die voor alle eenheden dezelfde zijn. Verder nemen we aan, dat de eerste eenheid een gegeven begin-spanning V_0 heeft. Nu wordt gevraagd de stroomsterkte i_n en de spanning V_n in de n^e eenheid te berekenen.

In de n^e eenheid geldt:

$$V_n = Z_1 i_n + Z_2(i_n - i_{n+1})$$

$$V_{n+1} = - Z_1 i_{n+1} + Z_2(i_n - i_{n+1})$$

We moeten dus oplossen het stelsel differentievergelijkingen:

$$(9.9) \qquad (Z_1 + Z_2)\, i(n) - Z_2 i(n+1) - V(n) = 0$$

$$(9.10) \qquad Z_2\, i(n) - (Z_1 + Z_2)\, i(n+1) - V(n+1) = 0.$$

Toepassing van formule (5.8) geeft:

$$(Z_1 + Z_2)\, i(n) - Z_2[p^{-1} * i(n) - i_0.p^{-1}] = V(n)$$

$$Z_2\, i(n) - (Z_1 + Z_2)[p^{-1} * i(n) - i_0 p^{-1}] = p^{-1} * V(n) - V_0.p^{-1},$$

waarin i_0 de nog onbekende stroomsterkte in de "nulde" eenheid is.
Na eliminatie van $V(n)$ krijgen we voor $i(n)$ de differentievergelijking:

$$[Z_2.p^2 - 2(Z_1+Z_2).p + Z_2.\delta] * i(n) = Z_2 i_0.\delta - ((Z_1+Z_2)i_0 + V_0).p.$$

Hieruit volgt nu onmiddellijk:

$$(9.11) \qquad i(n) = [Z_2 i_0.\delta - ((Z_1+Z_2)i_0+V_0).p] / [Z_2.p^2 - 2(Z_1+Z_2).p + Z_2.\delta].$$

Indien men nu $\frac{Z_1+Z_2}{Z_2} = \cosh \tau$ stelt, dan gaat (9.11) na partieel breuksplitsen over in:

$$i(n) = + \left(\frac{i_0 Z_2 \sinh \tau + V_0}{2Z_2 \sinh \tau}\right) \delta/(\delta - \alpha p) +$$

$$+ \left(\frac{i_0 Z_2 \sinh \tau - V_0}{2Z_2 \sinh \tau}\right) \delta/(\delta - \beta p),$$

waarin $\alpha = \frac{1}{\cosh \tau + \sinh \tau} = e^{-\tau}$ en $\beta = \frac{1}{\cosh \tau - \sinh \tau} = e^{+\tau}$

Toepassing van (5.9) levert tenslotte

$$i(n) = \left(\frac{i_0 Z_2 \sinh \tau + V_0}{2\, Z_2 \sinh \tau}\right)\{e^{-n\tau}\} + \left(\frac{i_0 Z_2 \sinh \tau - V_0}{2\, Z_2 \sinh \tau}\right)\{e^{+n\tau}\}$$

$$= i_0 \{\cosh n\tau\} - \frac{V_0}{Z_2 \sinh\tau} \{\sinh n\tau\}.$$

Derhalve:

(9.12) $$i_n = i_0 \cosh n\tau - \frac{V_0}{Z_2 \sinh \tau} \sinh n\tau,$$

waarin

$$\tau = \cosh^{-1} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}$$

De spanning V_n kan nu gemakkelijk berekend worden met behulp van (9.9). Tenslotte bepaalt de relatie $V_{N+1} = 0$, waarin N het rangnummer van de laatste eenheid is (zie figuur) de nog onbekende stroomsterkte i_0.

Opmerking

Zoals reeds in de inleiding van paragraaf 1 is opgemerkt kan de hier gegeven theorie uitgebreid worden tot stuksgewijs continue functies, afhankelijk van een continue variabele t met $t \geq a$ (a is een willekeurige constante). Zie de in paragraaf 1 genoemde boeken van J. Mikusinski en L. Berg.
Geheel analoog als bij het oplossen van differentievergelijkingen kunnen in deze uitgebreide theorie differentiaalvergelijkingen op algebraïsche wijze opgelost worden.
Deze algebraïsche methode, waarbij onder meer de operator $\frac{d}{dt}$ vervangen wordt door het symbool s en waarbij dan met s gerekend wordt alsof het een algebraïsche grootheid zou zijn, vindt z'n oorsprong bij O. Heaviside. Een fraaie rechtvaardiging van Heaviside's operatoren rekening wordt gegeven in de bovenbedoelde operatorenrekening van J. Mikusinski.