stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE ZW 1970-008 SEPTEMBER

P. MULLENDER

OVER GETALLEN

VOORDRACHT IN DE SERIE "ELEMENTAIRE ONDERWERPEN VANUIT HOGER STANDPUNT BELICHT"

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Over Getallen

1. Notaties

In het volgende duiden we de verzameling der natuurlijke getallen aan met N, die der gehele getallen met G, die der reele getallen met R en die der complexe getallen met C.

Steeds is
$$i = \sqrt{-1} \quad \text{en} \quad e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$
Voorts
$$K = \{ae + \frac{b}{e} : \ a \in G,\ b \in G\},$$
$$E = \{xe + \frac{y}{e} : \ x \in R,\ y \in R,\ 0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1\}.$$
We merken op dat $\frac{1}{e} = \bar{e}$ (de toegevoegd complexe van e). Voorts, dat K een ring zonder nuldelers is en het quotientenlichaam van K algebraisch over het lichaam van de rationale getallen is, dat daaruit ontstaat door adjunctie van e; K is de ring der gehelen in die algebraische lichaamsuitbreiding. Tenslotte, dat E het parallelogram in het complexe vlak is met hoekpunten 0, e, $\bar{e}$ en 1, waarbij van de rand alleen de zijden die in 0 samenkomen zijn opgenomen met uitzondering van e en $\bar{e}$.

Definieren we $\forall\ c \in C$: $E_c = \{c + z\colon\ z \in E\}$, dan is
$$\cup\ \{E_c : c \in K\} = C. \qquad (1)$$

2. De algorithmus van Euclides

De algorithmus van Euclides dient ter bepaling van de g.g.d. van twee gehele getallen. De methode kan echter, behalve in G, ook toegepast worden in K. Eerst in G:

Stel $p \varepsilon G$ en $q \varepsilon G$. We gaan aldus tewerk:

$\frac{p}{q} = a_o + \frac{r_o}{q}$, dus $p = a_o q + r_o$ $(a_o \varepsilon G,\ r_o \varepsilon G,\ 0 \leqq \frac{r_o}{q} < 1)$;

als $r_o = 0$, kunnen we niet verder, maar als $r_o \neq 0$, stellen we

$\frac{q}{r_o} = a_1 + \frac{r_1}{r_o}$, dus $q = a_1 r_o + r_1$ $(a_1 \varepsilon N,\ r_1 \varepsilon G,\ 0 \leqq \frac{r_1}{r_o} < 1)$;

als $r_1 = 0$, gaan we niet verder, maar als $r_1 \neq 0$, stellen we

$\frac{r_o}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}$, dus $r_o = a_2 r_1 + r_2$ $(a_2 \varepsilon N,\ r_2 \varepsilon G,\ 0 \leqq \frac{r_2}{r_1} < 1)$

etc..

Na een eindig aantal stappen breekt het procédé af, daar $|q| > |r_o| > |r_1| > \ldots$ en er slechts eindig veel gehele getallen zijn met absolute waarde kleiner dan $|q|$. Indien voor zekere $n \varepsilon N$ geldt $r_n = 0$, dan is r_{n-1} (of $|r_{n-1}|$, als men dat prefereert) de g.g.d. van p en q.

We merken op dat men meestal $q \varepsilon N$ onderstelt, hetgeen zonder beperking der algemeenheid kan geschieden. Dan zijn niet alleen $a_1, a_2, \ldots$ natuurlijke getallen, maar ook $r_o, r_1, r_2, \ldots$, behalve de laatste. Hierboven hebben we bedoelde onderstelling niet gemaakt om de overeenstemming met de algorithmus in K beter te doen uitkomen. Nu dan de algorithmus in K:

Zij $p \varepsilon K$ en $q \varepsilon K$. We stellen

$\frac{p}{q} = a_o + \frac{r_o}{q}$, dus $p = a_o q + r_o$ $(a_o \varepsilon K,\ r_o \varepsilon K,\ \frac{r_o}{q} \varepsilon E)$.

We merken op dat bij $\frac{p}{q}$, op grond van (1), precies één $a_o \in K$ bestaat, zo, dat $\frac{p}{q} \in E_{a_o}$, dus $\frac{p}{q} - a_o \in E$; d.w.z., a_o is door $\frac{p}{q}$ ondubbelzinnig bepaald. Ook r_o is dientengevolge ondubbelzinnig bepaald, terwijl $r_o = p - a_o q \in K$. De verzameling E vervult blijkbaar dezelfde rol als boven het vak $[0,1)$.

Als $r_o = 0$, is $\frac{p}{q} = a_o$ en gaan we niet verder. Maar als $r_o \neq 0$, stellen we

$$\frac{q}{r_o} = a_1 + \frac{r_1}{r_o}, \text{ dus } q = a_1 r_o + r_1 \quad (a_1 \in H,\ r_1 \in K,\ \frac{r_1}{r_o} \in E),$$

waarbij

$$H = \{ae + \frac{b}{e} : a \in N,\ b \in N\}. \qquad (2)$$

Immers, het is duidelijk dat $\cup \{E_c : c \in H\}$ juist dat deel van het complexe vlak omvat dat bestaat uit alle punten z met $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{3}$ die niet tot E behoren. Welnu, aangezien $\frac{r_o}{q} \in E$, geldt $|\arg \frac{q}{r_o}| = |\arg \frac{r_o}{q}| \leqq \frac{\pi}{3}$, terwijl $\frac{q}{r_o} \notin E$. De verzameling H neemt nu dus de rol over van N.

Als, $r_1 = 0$, is $\frac{p}{q} = a_o + \frac{1}{a_1}$ en gaan we niet verder. Maar als $r_1 \neq 0$, stellen we

$$\frac{r_o}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \text{ dus } r_o = a_2 r_1 + r_2 \quad (a_2 \in H,\ r_2 \in K,\ \frac{r_2}{r_1} \in E) \text{ etc..}$$

Het procédé breekt weer na een eindig aantal stappen af, daar opnieuw geldt $|q| > |r_o| > |r_1| > \ldots$ en er ook maar eindig veel getallen in K zijn met absolute waarde kleiner dan $|q|$.

Vervangt men $\frac{p}{q}$ door λ, $\frac{r_o}{q}$ door λ_o, $\frac{r_1}{q}$ door λ_1 etc., dan gaat de algorithmus over in

$$\lambda = a_0 + \lambda_0, \; \frac{1}{\lambda_0} = a_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \; \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = a_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \; . \; . \; . \qquad (3)$$

met $a_0 \in K$, $a_1 \in H$, $a_2 \in H$, . . . en $\lambda_0 \in E$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \in E$, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in E$, . .
Hieruit volgt, aangenomen dat $\lambda_{n-1} \neq 0$ en $\lambda_n = 0$,

$$\lambda = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \; .$$

Dit is de zgn. "gewone kettingbreukontwikkeling" van $\frac{p}{q} = \lambda$, maar nu gerealiseerd in K i.p.v. in G. Voor deze kettingbreuk gebruiken we de notatie $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

3. <u>De kettingbreukalgorithmus</u>

De algorithmus (3) kan worden beschouwd als een generalisatie van de algorithmus van Euclides, in die zin, dat hij ook kan worden toegepast als λ niet rationaal is, namelijk, op een reële λ als we werken in G en op een complexe λ als we werken in K. Is λ irrationaal over G of K, dan breekt de algorithmus niet af, want uit de rationaliteit van een der quotienten $\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}}$ volgt de rationaliteit van alle voorgaande, dus ook van λ; en dit geval zou zich voordoen als voor zekere n zou gelden $\lambda_n = 0$.

Men ziet gemakkelijk in dat, indien λ reëel is, dan alle getallen a_0, a_1, a_2, . . . en λ_0, λ_1, λ_2, . . . reëel zijn, zodat $a_0 \in G$, $a_1 \in N$, $a_2 \in N$, . . . en $0 \leqq \lambda_0 < 1$, $0 \leqq \frac{\lambda_1}{\lambda_0} < 1$, $0 \leqq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$, . . . , zodat dan de kettingbreukontwikkeling in K dezelfde is als die in G. De eerste kan derhalve ook als een generalisatie van de laatste beschouwd worden.

We noemen de getallen $a_1, a_2, \ldots$ de wijzergetallen van de kettingbreuk en de kettingbreuken die we krijgen door eerder af te breken, namelijk, $[a_0]$, $[a_0, a_1]$, $[a_0, a_1, a_2]$, . . . , de naderende breuken. Tenslotte schrijven we

$$a_0' = \lambda = a_0 + \lambda_0,\ a_1' = \frac{1}{\lambda_0} = a_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0},\ a_2' = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = a_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots \quad (3')$$

Dan is $\lambda = [a_0'] = [a_0, a_1'] = [a_0, a_1, a_2'] = \ldots$

Voor het geval λ niet rationaal is rijst nu de vraag, welk verband er bestaat tussen λ en de op bovenstaande wijze ondubbelzinnig bepaalde rij van naderende breuken, in het bijzonder, of die rij convergeert en of zij dan λ tot limiet heeft. We zullen zien dat het antwoord bevestigend moet luiden zowel voor complexe als voor reële λ.

We merken op dat de keuze van E ter vervanging van het vak $[0,1)$ bij de toepassing van de algorithmus van Euclides op K niet noodzakelijk en zelfs niet gebruikelijk is. Ook kan men bij de toepassing op G een ander vak kiezen, bijv. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, maar het gevolg hiervan zou zijn dat ook negatieve wijzergetallen zouden optreden. Het directe gevolg van onze keuze van E is dat de wijzergetallen alle behoren tot H.

4. De naderende breuken

We stellen de getallen voor door punten die we vastleggen met behulp van homogene coordinaten. Daartoe schrijven we $P_\infty = (1,0)$ en $P_0 = (0,1)$ en $\lambda = (\lambda, 1) = \lambda P_\infty + P_0 = P$.

We beschouwen de kettingbreukontwikkeling van λ zoals boven gegeven en onderstellen daarbij dat $\lambda_0 = \lambda \neq 0$, d.w.z., $a_0 = 0$.

We definieren punten $P_\nu = (p_\nu, q_\nu)$ en $P'_\nu = (p'_\nu, q'_\nu)$ door middel van de betrekkingen

$$P_\nu = P_{\nu-2} + a_\nu P_{\nu-1} \text{ en } P'_\nu = P_{\nu-2} + a'_\nu P_{\nu-1} \quad (\nu = 2,3,\ldots), \qquad (4)$$

aangevuld met

$$P_1 = P_\infty + a_1 P_0 = (1, a_1) \text{ en } P'_1 = P_\infty + a'_1 P_0 = (1, a'_1). \qquad (5)$$

We merken op dat de coordinaten van de punten door deze formules ondubbelzinnig zijn vastgelegd, maar dat punten met verschillende coordinaten kunnen samenvallen, namelijk, als de verhouding tussen de coordinaten dezelfde is.

Uit bovenstaande definities volgt $\forall\ \nu \in N\ (\lambda_{\nu-1} \neq 0)$:

$$P = (\lambda, 1) = (\lambda_0, 1) = \lambda_0 P_\infty + P_0 = \lambda_\nu P_{\nu-1} + \lambda_{\nu-1} P_\nu = \lambda_{\nu-1} P'_\nu. \qquad (6)$$

Immers, uit (3') volgt $1 = \lambda_0 a_1 + \lambda_1 = \lambda_0 a'_1$, dus

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_0 + \lambda_0 P_1 &= \lambda_1 P_0 + \lambda_0 (P_\infty + a_1 P_0) = \\ &= \lambda_0 P_\infty + (\lambda_0 a_1 + \lambda_1) P_0 = \lambda_0 P_\infty + P_0 = P \quad \text{en} \end{aligned}$$

$$\lambda_0 P'_1 = \lambda_0 (P_\infty + a'_1 P_0) = \lambda_0 P_\infty + \lambda_0 a'_1 P_0 = \lambda_0 P_\infty + P_0 = P.$$

Voorts volgt uit (3') $\lambda_{\nu-2} = \lambda_{\nu-1} a_\nu + \lambda_\nu = \lambda_{\nu-1} a'_\nu$ als $\lambda_{\nu-1} \neq 0$, dus, op grond van (4),

$$\begin{aligned} \lambda_\nu P_{\nu-1} + \lambda_{\nu-1} P_\nu &= \lambda_\nu P_{\nu-1} + \lambda_{\nu-1}(P_{\nu-2} + a_\nu P_{\nu-1}) = \\ &= \lambda_{\nu-1} P_{\nu-2} + (\lambda_{\nu-1} a_\nu + \lambda_\nu) P_{\nu-1} = \lambda_{\nu-1} P_{\nu-2} + \lambda_{\nu-2} P_{\nu-1} \quad \text{en} \end{aligned}$$

$$\lambda_{\nu-1}P'_\nu = \lambda_{\nu-1}(P_{\nu-2} + a'_\nu P_{\nu-1}) =$$
$$= \lambda_{\nu-1}P_{\nu-2} + \lambda_{\nu-1}a'_\nu P_{\nu-1} = \lambda_{\nu-1}P_{\nu-2} + \lambda_{\nu-2}P_{\nu-1}.$$

Uit een en ander volgt onmiddellijk de juistheid van (6).

Uit (6) volgt dat de punten P'_ν samenvallen met P, d.w.z., $\frac{p'_\nu}{q'_\nu} = \lambda$ voor alle ν met $\lambda_{\nu-1} \neq 0$. Indien $\lambda_\nu = 0$, dan is $P'_\nu = P_\nu$ en $a'_\nu = a_\nu$, dus $\lambda = \frac{p_\nu}{q_\nu} = [0,a_1,\dots,a_\nu] = [0,a_1,\dots,a'_\nu]$. Maar hieruit kunnen we concluderen dat $\forall\ \nu \in N\ (\lambda_{\nu-1} \neq 0)$:

$$[0,a_1,\dots,a_\nu] = \frac{p_\nu}{q_\nu}\ , \tag{7}$$

m.a.w., de punten P_ν stellen de naderende breuken voor. En, omdat uit (4) en (5) volgt dat alle p_ν en q_ν geheel zijn (respectievelijk tot G of K behoren), hebben we in (7) een gewone breukvoorstelling van die naderende breuken.

De relaties (4) kunnen ook aldus worden geschreven:

$$\begin{pmatrix} p_{\nu-1} & p_\nu \\ q_{\nu-1} & q_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{\nu-2} & p_{\nu-1} \\ q_{\nu-2} & q_{\nu-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_\nu \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} p_{\nu-1} & p'_\nu \\ q_{\nu-1} & q'_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{\nu-2} & p_{\nu-1} \\ q_{\nu-2} & q_{\nu-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a'_\nu \end{pmatrix},$$

waaruit volgt, daar

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix},$$

$\forall\ n \in N\ (\lambda_{n-1} \neq 0)$:

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} = \prod_{\nu=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_\nu \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} p_{n-1} & p'_n \\ q_{n-1} & q'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a'_n \end{pmatrix} \cdot \prod_{\nu=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_\nu \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Dit impliceert

$$p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = p_{n-1}q'_n - q_{n-1}p'_n = (-1)^n, \tag{9}$$

dus

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}\cdot q_n} \quad \text{en} \quad \lambda - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}\cdot q'_n}. \tag{10}$$

Uit (9) volgt dat de breuken $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ in (7) onvereenvoudigbaar zijn.

Indien λ reëel is en $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ dus behoren tot het reële vak $[0,1)$, terwijl $a_1, a_2, \ldots$ dan natuurlijke getallen zijn (zie paragraaf 3), dan volgt uit (4) en (5) dat $\forall\, n \in N\ (\lambda_{n-1} \neq 0)$:

$$q_n' \geqq q_n > q_{n-1} > \ldots ,$$

zodat, voor het geval λ bovendien irrationaal is, $q_n \to \infty$ als $n \to \infty$. Dus volgt in dit geval uit (10) dat de rij der naderende breuken inderdaad convergeert met limiet λ.

5. <u>De convergentie van de kettingbreukontwikkeling in K</u>

Zij λ irrationaal over K en zij opnieuw $a_0 = 0$, dus $\lambda_0 = \lambda$. Het laatste beperkt de algemeenheid niet, daar a_0 alleen invloed heeft op de tellers p_n en niet op de noemers q_n van de naderende breuken en het alleen de noemers zijn die het verschil tussen λ en die naderende breuken bepalen.

Nu is

$$\forall\, n \in N: \left|\arg \frac{q_n}{q_{n-1}}\right| \leqq \frac{\pi}{3}. \tag{12}$$

Want $\left|\arg \frac{q_1}{q_0}\right| = |\arg a_1| \leqq \frac{\pi}{3}$ (alle wijzergetallen behoren tot H) en, aangezien op grond van (4) voor $n = 2,3,\ldots$

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} ,$$

volgt uit $\left|\arg \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right| = \left|\arg \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}\right| \leqq \frac{\pi}{3}$, dat ook $\left|\arg \frac{q_n}{q_{n-1}}\right| \leqq \frac{\pi}{3}$, omdat $|\arg a_n| \leqq \frac{\pi}{3}$. Door volledige inductie volgt dus de juistheid van (12).

Ook is

$$\forall\, n \in N: \left|\arg \frac{q_n'}{q_{n-1}}\right| \leqq \frac{\pi}{3}. \tag{12'}$$

Immers, op grond van (4) geldt voor n = 2,3,...

$$\frac{q_n'}{q_{n-1}} = a_n' + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}},$$

terwijl eveneens $|\arg a_n'| \leqq \frac{\pi}{3}$; en voor n = 1 geldt $\frac{q_1'}{q_0} = a_1'$.

We gebruiken enige hulpstellingen:

<u>Lemma 1</u> Indien $|A| \leqq \frac{\pi}{3}$, $|B| \leqq \frac{\pi}{3}$, $|C| \leqq \frac{\pi}{3}$ met reele A, B en C, dan is $S = \cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A) \geqq 0$.

<u>Bewijs</u> Zonder beperking der algemeenheid mogen we $A \geqq B \geqq C$ onderstellen. We schrijven $A - B = X$, $B - C = Y$ en $A - C = Z$. Dan geldt $X \geqq 0$, $Y \geqq 0$, $\frac{2\pi}{3} \geqq Z = X + Y$ en

$$S = \cos X + \cos Y + \cos Z =$$

$$= 2\cos\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} + \cos Z \geqq$$

$$\geqq 2\cos\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X+Y}{2} + \cos Z =$$

$$= 2\cos^2\frac{Z}{2} + \cos Z = 2\cos Z + 1 \geqq -1 + 1 = 0.$$

<u>Lemma 2</u> Indien a, b en c complexe getallen zijn met arg a = A, arg b = B en arg c = C, zodanig, dat A, B en C voldoen aan de voorwaarden van lemma 1, dan is

$$|a + b + c|^2 \geqq 3 \min\{|ab|, |bc|, |ca|\}.$$

<u>Bewijs</u>

$$|a + b + c|^2 = (|a|\cos A + |b|\cos B + |c|\cos C)^2 +$$

$$+ (|a|\sin A + |b|\sin B + |c|\sin C)^2 =$$

$$= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2|ab|\cos(A - B) +$$

$$+ 2|bc|\cos(B - C) +$$

$$+ 2|ca|\cos(C - A) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(|a| - |b|)^2 + \tfrac{1}{2}(|b| - |c|)^2 + \tfrac{1}{2}(|c| - |a|)^2 +$$

$$+ |ab|(1 + 2\cos(A - B)) +$$

$$+ |bc|(1 + 2\cos(B - C)) +$$

$$+ |ca|(1 + 2\cos(C - A)) \geqq$$

$$\geqq (3 + 2\cos(A-B) + 2\cos(B-C) + 2\cos(C-A)).\min\{|ab|,|bc|,|ca|\} \geqq$$

$$\geqq 3\min\{|ab|,|bc|,|ca|\}$$ (het laatste op grond van lemma 1).

Lemma 3 Indien a, b en c aan dezelfde voorwaarden voldoen als in lemma 2, dan geldt ook

$$|abc + a + b|^2 \geqq 3|ab|.\min\{|ac|,|bc|,1\}$$

en

$$|ac + bc + 1|^2 \geqq 3|c|.\min\{|abc|,|a|,|b|\}.$$

Bewijs Volgt onmiddellijk uit lemma 2 door te schrijven

$$|abc + a + b| = |ab|.|c + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{a}|, \quad |ac + bc + 1| = |c|.|a + b + \tfrac{1}{c}|.$$

Lemma 4 Indien a en b complexe getallen zijn met arg a = A en arg b = B, zodanig, dat $|A - B| \leqq \frac{2\pi}{3}$, dan geldt

$$|a + b|^2 \geqq |ab|.$$

Bewijs $|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|\cos(A - B) \geqq$

$$\geqq |a|^2 + |b|^2 - |ab| =$$

$$= (|a| - |b|)^2 + |ab| \geqq |ab|.$$

Lemma 5 Indien a en b aan dezelfde voorwaarden voldoen als in lemma 4, dan is $\max\{|a + b|, |\frac{1}{a} + \frac{1}{b}|\} \geqq 1$.

Bewijs Volgens lemma 4 is $|\frac{1}{a} + \frac{1}{b}|^2 \geqq \frac{1}{|ab|}$.

We stellen $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $M_n = \min\{|q_{n-1}|, |q_n|\}$. Dan is

$$M_n \geqq M_{n-1} \qquad (n = 2,3,\ldots). \tag{13}$$

Want, als $|q_{n-1}| < |q_{n-2}|$, dan is volgens (4), (12) en lemma 4

$$\left|\frac{q_n}{q_{n-1}}\right|^2 = \left|a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right|^2 \geqq |a_n| \cdot \left|\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right| > 1,$$

terwijl, indien $|q_{n-2}| \leqq |q_{n-1}|$,

$$\left|\frac{q_n}{q_{n-2}}\right|^2 = \left|a_n \cdot \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} + 1\right|^2 \geqq |a_n| \cdot \left|\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}\right| \geqq 1.$$

We beweren dat ook

$$M_n \geqq M_{n-3}\sqrt{3} \qquad (n = 4,5,\ldots). \tag{14}$$

Want, op grond van (4) geldt

$$q_{n-1} = a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3} = a_{n-1}a_{n-2}q_{n-3} + a_{n-1}q_{n-4} + q_{n-3}\ ,$$

zodat, indien $|q_{n-4}| < |q_{n-3}|$, volgens (12) en lemma 3

$$\left|\frac{q_{n-1}}{q_{n-4}}\right|^2 = \left|a_{n-1}a_{n-2} \cdot \frac{q_{n-3}}{q_{n-4}} + a_{n-1} + \frac{q_{n-3}}{q_{n-4}}\right|^2 \geqq 3$$

en, indien $|q_{n-3}| < |q_{n-4}|$,

$$\left|\frac{q_{n-1}}{q_{n-3}}\right|^2 = \left|a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-1} \cdot \frac{q_{n-4}}{q_{n-3}} + 1\right|^2 \geqq 3,$$

waaruit volgt dat $|q_{n-1}| \geqq M_{n-3}\sqrt{3}$. Aangezien dan ook geldt $|q_n| \geqq M_{n-2}\sqrt{3} \geqq M_{n-3}\sqrt{3}$, volgt hieruit het gestelde.

Uit (10) en (14) volgt de convergentie van de rij der naderende breuken van onze kettingbreukontwikkeling. Dat de

limiet van die rij inderdaad gelijk is aan λ, volgt eveneens uit (10) en (14), daar voor n = 2,3,... geldt $|q_n'| \geqq M_{n-1}$.
Immers, $q_n' = a_n' q_{n-1} + q_{n-2}$, zodat voor het geval $|q_{n-1}| < |q_{n-2}|$

$$\left|\frac{q_n'}{q_{n-1}}\right| = \left|a_n' + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right|,$$

terwijl voor het geval $|q_{n-2}| \leqq |q_{n-1}|$

$$\left|\frac{q_n'}{q_{n-2}}\right| = \left|a_n' \cdot \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} + 1\right|.$$

In beide gevallen krijgen we op grond van lemma 4 een uitkomst groter dan 1, omdat $\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}} \varepsilon$ E en $a_n' = \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}}$, dus $|a_n'| > 1$.

6. Approximatiestellingen

Uit het voorgaande volgen enige resultaten met betrekking tot de benadering van irrationale getallen door rationale.
We beweren:

Bij ieder reëel of complex getal λ bestaan oneindig veel breuken $\frac{p}{q}$ met $p \varepsilon G$ en $q \varepsilon G$, resp. $p \varepsilon K$ en $q \varepsilon K$, zodanig, dat

$$\left|\lambda - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{|q^2|}.$$

De bewering is evident voor rationale λ, zodat we ons tot irrationale λ kunnen beperken.

In het reële geval volgt de juistheid van de bewering uit het feit dat iedere naderende breuk van λ klaarblijkelijk aan de gestelde eis voldoet, namelijk, op grond van (10) en de ongelijkheid $q_n' = a_n' q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1} > 0$.

In het complexe geval voldoet van elke twee opeenvolgende naderende breuken van λ tenminste één aan de voorwaarde

$$|\lambda - \frac{p}{q}| \leqq \frac{1}{|q^2|}.$$

Uit (4) en (3') volgt namelijk voor n = 2,3,...

$$q'_n - q_n = q_{n-1}(a'_n - a_n) = \frac{q_{n-1}}{a'_{n+1}}, \text{ dus } \frac{q'_n}{q_{n-1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} + \frac{1}{a'_{n+1}}.$$

Uit (4) volgt echter ook $q'_{n+1} = a'_{n+1}\, q_n + q_{n-1}$, dus

$$\frac{q'_{n+1}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + a'_{n+1}.$$

Toepassing van lemma 5 geeft nu, dat òf $|q'_n| \geqq |q_{n-1}|$, òf $|q'_{n+1}| \geqq |q_n|$, of aan beide ongelijkheden is voldaan, waaruit het boven gestelde volgt.

In het reele geval hebben we de volgende verscherping:

Bij ieder reeel getal λ bestaan oneindig veel reele breuken $\frac{p}{q}$, zo, dat

$$|\lambda - \frac{p}{q}| \leqq \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$

Dit volgt hieruit dat van elke drie opeenvolgende naderende breuken van λ tenminste één aan de gestelde voorwaarde voldoet.

Ten einde dit aan te tonen merken we op dat volgens (6)

$$\forall\, n \in N: \quad \lambda_{n-1}q'_n = 1, \tag{15}$$

zodat op grond van (10)

$$\forall\, n \in N: \quad \left|\lambda - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{|\lambda_{n-1}|}{|q_{n-1}|} = \frac{|\lambda_{n-1}q_{n-1}|}{|q^2_{n-1}|}. \tag{16}$$

We stellen $\forall\, n \in N$: $\lambda_{n-1}q_{n-1} = \delta_{n-1}$. Het is duidelijk dat in het reele geval $\forall\, n \in N$: $\delta_{n-1} \geqq 0$, waarbij het gelijkteken slechts kan optreden als λ rationaal is.

Veronderstel nu dat δ_{n-1}, δ_n en δ_{n+1} groter zijn dan $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Uit (6) volgt dat op grond van de definities

$$\forall\, n \in N: \quad \lambda_n q_{n-1} + \lambda_{n-1} q_n = 1, \tag{17}$$

dus

$$\delta_n \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} + \delta_{n-1} \cdot \frac{q_n}{q_{n-1}} = 1,$$

zodat

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{q_n}{q_{n-1}} < \sqrt{5}.$$

Hieruit volgt

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} < \frac{q_{n-1}}{q_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Dezelfde ongelijkheden gelden echter ook voor $\frac{q_{n+1}}{q_n}$, zodat

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} - \frac{q_{n-1}}{q_n} < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = 1,$$

dus $q_{n+1} - q_{n-1} < q_n$, d.w.z., $q_{n+1} < q_n + q_{n-1}$, in strijd met $q_{n+1} = a_{n+1}\, q_n + q_{n-1} \geqq q_n + q_{n-1}$.

Nemen we aan dat oneindig veel wijzergetallen groter dan 1 zijn, dan kunnen we zelfs het bestaan van oneindig veel breuken die voldoen aan de voorwaarde met $\sqrt{8}$ i.p.v. $\sqrt{5}$ aantonen. Het bewijs kan op dezelfde wijze worden gevoerd door te veronderstellen dat δ_{n-1}, δ_n en δ_{n+1} groter dan $\frac{1}{\sqrt{8}}$ zijn, terwijl $a_{n+1} \geqq 2$. Dan volgt namelijk dat $q_{n+1} - q_{n-1} < 2q_n$, d.w.z., $q_{n+1} < 2q_n + q_{n-1}$, in strijd met $q_{n+1} = a_{n+1}\, q_n + q_{n-1} \geqq$ $\geqq 2q_n + q_{n-1}$.