

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

ZW 1957-009

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr. H.J.A. Duparc

15 mei 1957

Differentiaalrekening en differentiërekening



The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

door

Prof. Dr H.J.A. Duparc

15 mei 1957

Differentiaalrekening en differentiërekening

Naast de welbekende differentiaaloperator D , welke aan een functie $f(x)$ toevoegt de afgeleide functie

$$f'(x) = Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

treedt in de differentiërekening als voornaamste operator op de differentieoperator Δ , welke aan een functie $f(x)$ toevoegt de differentie

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Zoals verderop blijkt, hebben beide operatoren een aantal eigenschappen gemeen (b.v. dat ze aan een polynoom van de n^e graad een polynoom van de graad $n-1$ toevoegen). Anderzijds is men geneigd om de differentieoperator als eenvoudiger operator te zien dan de differentiaaloperator, in welke nog een extra limietovergang optreedt. Toch blijkt, dat formules over differentieoperatoren soms ingewikkelder zijn dan die over differentiaaloperatoren, hetgeen hierdoor komt, dat $Df(x)$ een functie is van x alleen en $\Delta f(x)$ in eerste instantie een functie is van $x+1$ en x .

Wij gaan thans een aantal formules over elk van beide soorten operatoren vergelijken. Voordat dit geschiedt, is het goed om nog een operator in te voeren, welke in het volgende een belangrijke rol speelt, nl. de verschuivingsoperator E , waarvan de werking wordt gedefinieerd door

$$Ef(x) = f(x+1).$$

Verder heeft men dan $E^n f(x) = f(x+n)$, aanvankelijk direct in te zien voor natuurlijke n , maar bij definitie eveneens geldig voor willekeurige n . Bijgevolg heeft men

$$E^m E^n = E^{m+n}.$$

Direct duidelijk zijn voorts de formules

$$\Delta = E - 1, D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E^h - 1}{h},$$

waarbij bedoeld is, dat

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E^h - 1}{h} \right) f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{E^h - 1}{h} f(x) \right).$$

Naar analogie met de gewone analyse schrijft men wel

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E^h - 1}{h} = \log E, \text{ dus } D = \log E.$$

Om nog even hierop door te gaan, men is geneigd nu te schrijven

$$E = e^D, \quad E^x = e^{xD} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n D^n}{n!},$$

"dus"

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!},$$

waarmee de reeks van Mac Laurin is "teruggevonden". Het enige dat hier werkelijk is gevonden, is dat de functie $f(x)$ als ze naar machten van x te ontwikkelen is, de ontwikkeling (1) moet bezitten.

Keren wij thans terug tot ons plan om grondformules der differentiaalrekening en differentierekening te vergelijken.

Hoewel afgeleide en differentie van een n^e -graadsveelterm beide van de graad $n-1$ zijn, is de analogie verder nog niet groot. Men heeft $Dx^n = nx^{n-1}$, maar $\Delta x^n \neq nx^{n-1}$. De overeenkomst wordt gered door voor natuurlijke n te stellen $x^{(n)} = x(x-1)\dots(x-n+1)$, waarna men inderdaad vindt $\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$ (en gelukkig ook $Dx^{(n)} = nx^{(n-1)}$).

Men bedenke verder dat $x(x-1)\dots(x-n+1) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-n)}$, hetgeen aanleiding kan zijn om nu ook voor willekeurige n te definiëren $x^{(n)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-n)}$. Dit initiatief wordt beloond met de volgende formule

$$\Delta x^{(n)} = \frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+2-n)} - \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-n)} = \frac{n \cdot \Gamma(x+1)}{\Gamma(x+2-n)} = nx^{(n-1)},$$

thans geldig voor willekeurige n . De keerzijde van de medaille is, dat voor de thans ingevoerde pseudomachten een aantal rekenregels van gewone machten niet blijkt te gelden; men heeft nl.

$$(x^{(n)})^{(m)} \neq x^{(nm)}; \quad x^{(n)} x^{(m)} \neq x^{(n+m)}.$$

Wel heeft men

$$x^{(n)}_{(x-n)}^{(m)} = x^{(n+m)}$$

en ook

$$(x+y)^{(n)} = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} x^{(h)} y^{(n-h)} \quad (\text{formule van Van der Monde}).$$

De eerste formule vertoont eenzelfde inconvenient als de formule voor $\Delta(uv)$. Terwijl men nl. normaal heeft $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$ en $\Delta(cu) = c\Delta u$ (voor constante c), geldt in afwijking met de gewone analyse

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= (Eu)(Ev) - uv = (Eu)(Ev-v) + v(Eu-u) \\ &= (Eu)\Delta v + v \cdot \Delta u. \end{aligned}$$

De regel van Leibnitz in de differentierekening luidt dan ook

$$\Delta^n (uv) = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (E^h \cdot \Delta^{n-h} u) (\Delta^h v).$$

Wij gaan thans verder met het bepalen van de differentie van enige elementaire functies. Allereerst beschouwen wij de exponentiële functie. Men heeft $\Delta a^x = (a-1)a^x$, dus in het bijzonder $\Delta 2^x = 2^x$. Verder is men nieuwsgierig naar $\Delta \ln x$. Hiervoor vindt men $\ln(1 + \frac{1}{x})$, dus niet een dergelijk interessant resultaat als in de differentiaalrekening. Het is echter van belang om toch een functie u op te sporen welke voldoet aan $\Delta u = \frac{1}{x}$. Is nl. deze gevonden, dan is het in principe mogelijk, net als in de gewone integraalrekening, om een functie u te vinden, waarvan de differentie gelijk is aan een willekeurige (gebroken) rationale functie. In feite zijn wij hier reeds gekomen in de theorie der differentievergelijkingen. Wij willen echter dit ene probleem eerst apart oplossen en pas later iets algemeners zeggen over differentievergelijkingen.

Als *ex machina* helpt de Γ -functie ons nu weer opnieuw. Uit $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ volgt nl.

$$\log \Gamma(x+1) = \log x + \log \Gamma(x),$$

dus na differentiëren

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x}$$

en voor de functie u kunnen (en zullen) wij dus nemen

$$u = \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x).$$

Uit $\Delta \psi(x) = \frac{1}{x}$ volgt verder nog dat

$$\Delta \frac{(-)^n \psi^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{x^n},$$

waarna het nu doorzichtig is dat het bekende breuksplitsingsprocédé ons inderdaad een oplossing oplevert van $\Delta u = r(x)$, waarbij $r(x)$ een willekeurige rationale functie voorstelt.

Voorbeeld. $\Delta u = \frac{1}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{2}i}{x+i} - \frac{\frac{1}{2}i}{x-i}$

levert ons voor u de functie

$$u = \frac{1}{2}i \left(\frac{\Gamma'(x+i+1)}{\Gamma(x+i+1)} - \frac{\Gamma'(x-i+1)}{\Gamma(x-i+1)} \right),$$

welke desgewenst verder kan worden herleid.

Voor de goniometrische functies vindt men iets minder fraaie resultaten dan in de differentiaalrekening. Men heeft bijvoorbeeld

$$\Delta \sin x = 2 \sin \frac{1}{2} \cos(x + \frac{1}{2}), \text{ enz.},$$

waarna problemen als het bepalen van u uit $\Delta u = \sin x$ enz. ook oplosbaar blijken. Uiteraard geldt

$$\Delta \sin 2\pi x = \Delta \cos 2\pi x = \Delta \operatorname{tg} \pi x = 0.$$

De differentie van elke periodieke functie met periode 1 is immers 0. Omgekeerd is elke oplossing van $\Delta u = 0$ een periodieke functie met periode 1 (voortaan ω -functie te noemen). De meest algemene oplossingen van $\Delta u = r(x)$ blijkt na de gebruikelijke redenering te zijn $u = u_0 + \omega$, waarbij u_0 een particuliere oplossing is van die vergelijking en ω een willekeurige ω -functie. De ω -functies vervullen hier blijkbaar de rol van de constanten in de differentiaal- en integraalrekening.

Terwijl oplossingen van $y' = f(x)$ worden aangegeven door $\int f(x) dx + C$ zullen wij oplossingen van $\Delta u = r(x)$ aangeven met $Sr(x)\Delta x + \omega$, waarbij de eerste term een particuliere oplossing is van het probleem. Met Nörlund wordt onder dit symbool meestal die particuliere oplossing verstaan, die een zeer speciaal gedrag in het oneindige heeft (de zgn. hoofdoplossing). Dat het oneindige hier in het geding komt, is in principe daardoor in te zien, dat een differentievergelijking een verband oplegt slechts tussen de functiewaarden $u(x)$, $u(x+1)$, $u(x+2)$, ..., waarbij het enige verdichtspunt der argumenten $x, x+1, x+2, \dots$ het oneindige is.

Wij zijn hiermede in de sommatierekening gekomen en willen nu na gaan of de elementaire formules over integralen ook gelden voor de hier ontmoete sommen.

Het ontbreken van een kettingregel in de differentierekening maakt, dat formules over transformatie van sommatievariabele eveneens ontbreken. Wel echter heeft men een formule van "partiële" sommatie; in feite is het de welbekende formule van "partiële sommatie"

$$Suv\Delta x = U(E^{-1}v) - SU\Delta v \cdot \Delta x \quad \text{met} \quad \Delta U = u.$$

Voorbeeld.

$$\begin{aligned} Sxe^x \Delta x &= \frac{e^x(x-1)}{e-1} - S \frac{e^x}{e-1} \Delta x \\ &= \frac{e^x(x-1)}{e-1} - \frac{e^x}{(e-1)^2}. \end{aligned}$$

Met deze weinige opmerkingen willen wij nu aan de sommatierekening met haar netelige problemen voorbijgaan en iets over reeksen bespreken.

Naast de polynomen $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ heeft men pseudopolynomen $\sum_{n=0}^N b_n x^{(n)}$ met de prettige eigenschap, dat elk polynoom een pseudopolynoom is en elk pseudopolynoom een polynoom (te bewijzen b.v. door volledige inductie naar N).

Wij beschouwen thans pseudomacht-reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n)}$, meestal niet pseudo-

machtreeksen genoemd, maar faculteitenreeksen (van de 2e soort). Faculteitenreeksen van de eerste soort zijn reeksen van de gedaante $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(-n)}$. Combinaties van beide soorten faculteitenreeksen vormen het analogon van de Laurentontwikkelingen, zoals die bekend zijn in de functietheorie.

Twee problemen treden nu op de voorgrond: 1^o een convergentietheorie van faculteitenreeksen; 2^o de ontwikkeling van een gegeven functie in een faculteitenreeks. Elk dezer problemen raakt andere belangrijke gebieden uit de wiskunde, nl. respectievelijk de theorie der reeksen van Dirichlet, ook bekend in en nuttig voor de getallentheorie en de theorie van het interpoleren.

Beschouwen wij eerst de convergentietheorie. Evenals bij de gewone reeksen is hier het convergent-zijn een "gerichte" eigenschap, d.w.z. als voor zekere z_0 convergentie heerst, is er voor alle z , die een transitieve niet-symmetrische relatie t.a.v. z vervullen, ook convergentie. Bij de convergentie van gewone reeksen is het gericht zijn niets anders dan de gewone ordering van de modulus, d.w.z. uit convergentie voor z_0 volgt convergentie voor alle z met $|z| < |z_0|$. Hier, bij de beide soorten faculteitenreeksen, leidt convergentie in z_0 tot convergentie in alle z met $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$, een eigenschap die deze reeksen gemeen hebben met de reeksen van Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$. Het is zelfs zo, dat convergentie in een punt z van een der drie reeksen

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (-)^n}{n!} (z-1)^{(n)} ; \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \text{ en}$$

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! (z-1)^{(-n-1)}$$

convergentie van de beide andere reeksen in datzelfde punt z ten gevolge heeft. De meeste bewijzen der hier genoemde eigenschappen zijn te geven met behulp van partiële sommatie. Wij geven hier een bewijs (ten dele zonder partiële sommatie) van de bovengenoemde gerichte eigenschap voor de reeks $C(z)$.

Zij $C(z)$ convergent voor $z=z_0$. Dan heeft men voor alle z met $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ de relatie

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \text{ met } u_n(z_0) = \frac{a_n n! \Gamma(z_0)}{\Gamma(z_0+n)} \text{ en } v_n = \frac{\Gamma(z_0+n) \Gamma(z)}{\Gamma(z+n) \Gamma(z_0)}.$$

Voor grote n heeft men met gebruikmaking van een uit de formule van Stirling af te leiden resultaat over de Γ -functie

$$v_n = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z_0)} n^{z_0-z} (1+O(\frac{1}{n})), \text{ dus } |v_n| < kn^{-\sigma},$$

waarbij k een geschikt gekozen van n onafhankelijke constante voor-

stelt; hierbij is gesteld $\sigma = \operatorname{Re}(z - z_0)$. De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ is dus absoluut convergent indien $\sigma > 1$ is en de reeks $C(z)$ dan ook. Is echter slechts gegeven, dat $\sigma > 0$ is, dan is wel partiële sommatie nodig om te besluiten tot de (gewone) convergentie van $C(z)$.

Gaat men verder met de theorie op analoge wijze als in de theorie der machtrekken dan besluit men tot het bestaan van een convergentie-abscis voor elk der drie genoemde reeksen, dat is een getal λ , zodanig dat de reeksen convergent zijn voor $\operatorname{Re} z > \lambda$ en divergent voor $\operatorname{Re} z \leq \lambda$. Er blijkt ook een abscis μ van absolute convergentie te zijn en (het bovenstaande maakt dit al enigszins plausibel) men heeft $\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1$.

Multiplicatiethorema's van faculteitenreeksen zijn helaas ingewikkelder dan die voor reeksen van Dirichlet. Vandaar dat de faculteitenreeksen voor de getallentheorie van minder belang zijn.

Wij spreken nu over de tweede hierbovengenoemde quaestie, het ontwikkelen van een functie in een faculteitenreeks. Heuristisch gezien volgt uit

$$u(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^{(2)} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{(n)},$$

dat $a_0 = u(0)$, $a_1 = \frac{\Delta u(0)}{1!}$, enz., i.h.a. $a_n = \frac{\Delta^n u(0)}{n!}$. Hierbij is alvast maar ondersteld, dat de functie ontwikkelbaar is op de aangegeven wijze in een convergente reeks. Onder bepaalde veronderstellingen over $u(z)$ blijkt dit inderdaad het geval te zijn en geldt de formule van Newton

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n)}}{n!} \Delta^n u(0).$$

Stellig is de formule juist voor veeltermen $u(z)$, waarmee tevens een bewijs is gegeven voor de hierbovengenoemde formule van Van der Monde. Als voorbeeld van een niet-afbrekende ontwikkeling geven wij nog

$$2^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n)}}{n!}.$$

Gezien de in het bovenstaande opgemerkte analogie tussen 2^z en e^z is het niet bevreemdend, dat de functies analoge ontwikkelingen hebben.

Het is goed om nog op te merken, dat men voor $N+1$ keer differentieerbare functies u steeds heeft

$$u(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^{(n)}}{n!} \Delta^n u(0) + \frac{x^{(N+1)}}{(N+1)!} u^{(N+1)}(\xi),$$

waarbij ξ een geschikt gekozen punt is in het kleinste interval dat de reële getallen $0, 1, \dots, N$ en x bevat. (In principe kan men deze stelling zien als een uitbreiding van het theorema van Rolle).

Er zijn ook ontwikkelingen, die $u(x)$ uitdrukken b.v. in $\delta u(0) = (E^{\frac{1}{2}n} - E^{-\frac{1}{2}n})u(0)$ e.d. Zo verkrijgt men allerlei in de interpolatie-

theorie belangrijke formules; de hier genoemde geeft de interpolatie-formule van Stirling. Men verkrijgt zo ook die van Gauss, Bessel, Everett e.a.

Tenslotte behandelen wij nog enkele problemen over differentievergelijkingen, dat zijn vergelijkingen van het type

$$f(x, u, \Delta u, \dots, \Delta^n u) = 0$$

of, wat ermee equivalent is (in verband met $\Delta = E - 1$),

$$g(x, u, Eu, \dots, E^n u) = 0.$$

Beschouwen wij als voorbeeld de vergelijking

$$\Delta u + xu = 0.$$

Kennelijk kan men u willekeurig voorschrijven in een gebied $a \leq x < a+1$ ("beginvoorwaarde"), waarna u voor alle reële x uit de vergelijking rechtstreeks is te vinden. Continuïteit of zelfs differentieerbaarheid in de punten $a+n$ (n geheel) is dan niet gegarandeerd, het laatste ook niet als men $u(a) = \lim_{t \rightarrow 1} u(a+t)$ eist voor het begininterval. Men voorziet wel, dat er soms geschikte beginvoorwaarden op te leggen zijn, die wel tot b.v. differentieerbare functies aanleiding kunnen geven. Zoals is opgemerkt, is overigens een oplossing u slechts op ω -functies na bepaald.

Voor de bovengenoemde differentievergelijking is als het ware door scheiding van variabelen een geschikte oplossing te vinden. Men heeft nl.

$$Eu = (1-x)u,$$

zodat b.v. $u = \Gamma(1-x)$ voldoet en dus ook

$$u = \Gamma(1-x) + \omega.$$

We merken nog op, dat elke functie u , waarin k willekeurige functies optreden, oplossing is van een differentievergelijking van de k^e orde, b.v.

$$u = \omega_1 x + \omega_2 x^3 + 2,$$

dus

$$Eu = \omega_1(x+1) + \omega_2(x+1)^3 + 2, \quad E^2 u = \omega_1(x+2) + \omega_2(x+2)^3 + 2$$

en derhalve

$$\begin{vmatrix} u-2 & x & x^3 \\ Eu-2 & x+1 & (x+1)^3 \\ E^2 u-2 & x+2 & (x+2)^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Het zou te ver voeren om hier allerlei typen differentievergelijkingen te gaan oplossen. Wij volstaan met de vermelding dat van de meeste uit de theorie der differentiaalvergelijkingen bekende typen

ook de analoge differentievergelijkingen zijn bestudeerd. Alleen gaan wij nog in op de bekende groep der lineaire differentievergelijkingen.

Van de vergelijking

$$\sum_{n=0}^N a_n \Delta^n u = a(x)$$

is de meest algemene oplossing

$$u = u_0 + \omega_1 u_1 + \dots + \omega_N u_N,$$

waarbij u_0 een particuliere oplossing is en $u_1, \dots, u_N$ oplossingen zijn van de corresponderende homogene vergelijking

$$\sum_{n=0}^N a_n \Delta^n u = 0,$$

welke ook nog in dien zin onafhankelijk moeten zijn, dat geen compositum $\omega_1 u_1 + \dots + \omega_N u_N$, waarbij niet alle $\omega_1, \dots, \omega_N$ nul zijn, zelf identiek nul is.

Als criterium of N functies u_N in deze zin al of niet afhankelijk zijn, geldt het nul zijn of niet nul zijn van de aan de determinant van Wronski analoge determinant $[c_{ij}]$ van Casorati ($i, j = 0, \dots, N-1$) met $c_{ij} = \Delta^i u_j(x)$, of wat op hetzelfde neerkomt, de determinant $[d_{ij}]$ met $d_{ij} = E^i u_j(x)$.

Het vinden der basisoplossingen geschiedt ook op een welbekende wijze. Schrijft men de homogene differentievergelijking in de gedaante $\sum_{n=0}^N b_n E^n u = 0$, dan levert elk nulpunt α van de karakteristieke veelterm $\sum_{n=0}^N b_n t^n = 0$ een basisoplossing $u = \alpha^x$. Is α een k -voudig nulpunt, dan geeft α aanleiding tot de k in de gewenste zin onafhankelijke oplossingen $\alpha^x, x\alpha^x, x^{(2)}\alpha^x, \dots, x^{(k-1)}\alpha^x$.

Toepassing. Zij $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ ($n = 0, 1, \dots$). Gevraagd wordt u_N voor natuurlijke N .

Men heeft $(E^2 - E - 1)u_n = 0$ met als nulpunten van de karakteristieke veelterm

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Wegens $\alpha \neq \beta$ is dan

$$u_N = \omega_1 \alpha^N + \omega_2 \beta^N$$

en wegens $u_0 = 0, u_1 = 1$ vindt men $\omega_1(0) + \omega_2(0) = 0, \alpha \omega_1(0) + \beta \omega_2(0) = 1$, dus

$$\omega_1(N) = \omega_1(0) = \frac{1}{\alpha - \beta}, \quad \omega_2(N) = \omega_2(0) = \frac{1}{\beta - \alpha},$$

dus
$$u_N = \frac{\alpha^N - \beta^N}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^N - \beta^N).$$

Voor het vinden van een particuliere oplossing van de inhomogene lineaire differentievergelijking beschikt men over een procédé van variatie van de ω 's en voor sommige gevallen over operatorenmethoden.

Ook voor de differentievergelijking

$$\sum_{n=0}^N a_n(z) \Delta^n u = 0$$

is een algemene oplossingstheorie gegeven. Hierbij is geeist, dat $a_n(z) = z^{(n)} b_n(z)$, waarbij $b_N(z) = 1$ en verder $b_n(z)$ voor $n=0, 1, \dots, N-1$ in zeker halfvlak convergente faculteitenreeksontwikkelingen hebben. Evenals in de corresponderende theorie der differentiaalvergelijkingen vindt men dan voor de basisoplossingen in dat halfvlak convergente faculteitenreeksen van de gedaante

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{(n+\alpha)},$$

waarbij α samenhangt met de wortels van de zgn. indiciaalvergelijking

$$\sum_{n=0}^N a_n(0) \alpha^{(n)} = 0.$$

Bezitten dergelijke wortels α gehele verschillen, dan treden de bekende complicaties op, die aanleiding geven tot basisoplossingen, waarin nog een factor optreedt, die met de ψ -functie samenhangt.