STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM-O.

bibliotheek ex.

ZW 1959-009

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr Ir A.D. de Pater

13 mei 1959

Het beginsel van Castigliano

Inhoud

1. Inleiding. In het onderdeel der technische mechanica dat men wel met de naam "sterkteleer" aanduidt, neemt het beginsel van Castigliano een belangrijke plaats in; in hoofdzaak bij de berekening van statisch onbepaalde constructies.

Pas enige tientallen jaren geleden is gebleken dat het beginsel van Castigliano in wezen een bijzonder geval is van het beginsel van de complementaire energie, dat duaal staat tegenover het beginsel van het minimum der potentiële energie. Bovendien is toen gevonden dat dit beginsel van de complementaire energie een zeer belangrijke rol kan spelen bij het bepalen van benaderingsoplossingen van randwaardeproblemen uit de technische mechanica, zoals uit het volgende betoog moge blijken. In verband hiermede kwam mij dit onderwerp geschikt voor om behandeld te worden in de voordrachtenserie "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht".

2. Het beginsel van het minimum der potentiële energie.

We beschouwen een mechanisch systeem met m vrijheidsgraden. De noodzakelijke coördinaten geven we aan met q_k $(k = 1,\ldots m)$. Verder nemen we aan dat voor elke kracht die in of op het systeem werkt, een potentiaal valt aan te geven. De totale potentiële energie noemen we

$$U = U\,(q_1,\ldots\ldots q_m) \qquad (1)$$

Volgens het beginsel van de virtuele arbeid is het systeem nu in evenwicht als de potentiële energie als functie van de coördinaten stationnair is, m.a.w. als de eerste variatie van de potentiële energie

$$\delta U = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial U}{\partial q_k}\,\delta q_k \qquad (2)$$

voor èlke combinatie van virtuele veranderingen δq_k van de coördinaten q_k gelijk is aan nul. De coördinaten die bij de evenwichtsstand behoren zijn dus bepaald door de m vergelijkingen

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0\ , \quad (k = 1,\ldots .m) \qquad (3)$$

Voorts is de evenwichtsstand stabiel indien de tweede variatie van de potentiële energie, d.w.z. de functie

$$\delta^2 U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_l}\,\delta q_k\,\delta q_l\ , \qquad (4)$$

waarbij in de partiële differentiaalquotiënten $\partial^2 U/\partial q_k \partial q_l$ de waarden van q_k die bij de evenwichtsstand behoren, moeten worden ingevuld, voor èlke combinatie van virtuele veranderingen q_k, behalve degene waarbij ze alle gelijk nul zijn, groter is dan nul.

We gaan nu over tot de behandeling van continue systemen. In beginsel kan de evenwichtsstand hiervan op dezelfde wijze als bij systemen met een eindig aantal vrijheidsgraden bepaald worden, maar het feit dat we nu met oneindig veel vrijheidsgraden te maken hebben, brengt wel enige moeilijkheden met zich mede. We lichten dit toe aan de hand van een voorbeeld. We beschouwen (fig 1 blz 14) een horizontale gespannen snaar ter lengte l, die op een elastische bedding rust en waarop een constante belasting per lengte-eenheid q is geplaatst. fig 1 Is w de vertikale verplaatsing van een snaarelement dat in onvervormde toestand de lengte d x had, en S de spankracht in de snaar dan zal de lengte van het element na de vervorming

$$\sqrt{(dx)^2 + (dw)^2} = dx\sqrt{1 + (\frac{dw}{dx})^2} \approx dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} (\frac{dw}{dx})^2 \right\} \qquad (5)$$

bedragen, zodat, als we aannemen dat de snaar zo slap is dat de spankracht bij de vervorming niet verandert, de in ~~de snaar~~ het element opgehoopte arbeid bij de vervorming vermeerderd wordt met het bedrag

$$\frac{1}{2} S(\frac{dw}{dx})^2 dx$$

De potentiële energie van de snaar en de bedding is derhalve gelijk aan

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \left\{ S(\frac{dw}{dx})^2 + k w^2 \right\} dx , \qquad (6)$$

als k de beddingsconstante is, en als we aannemen dat de snaar zich uitstrekt tussen de punten x = -a en x = a, terwijl voor de belasting de potentiaal

$$U_{\cancel{l}\,e} = -q \int_{-a}^{a} w \, d\, x \qquad (7)$$

is aan te wijzen. In totaal is dus de potentiële energie van het systeem gelijk aan

$$U = \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{1}{2} S(\frac{dw}{dx})^2 + \frac{1}{2} k w^2 - q w \right\} d x . \qquad (8)$$

Voorts geldt dat de verplaatsing in de ophangpunten gelijk is aan nul, zodat

$$w = 0 \quad \text{voor } x = \pm a . \qquad (9)$$

Wij gaan nu w met het bedrag δw variëren, waarbij zowel w als δw van de onafhankelijk variabele x afhangen. We vinden dan

$$\delta U = \int_{-a}^{a} (S \frac{dw}{dx} \frac{d\delta w}{dx} + k w \delta w - q \delta w) dx , \qquad (10a)$$

$$\delta^2 U = \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \left\{ S(\frac{d\delta w}{dx})^2 + k(\delta w)^2 \right\} dx . \qquad (10b)$$

We zien al direct dat $\delta^2 U$ groter dan nul is als δw en/of $d\delta w/dx$ voor minstens één waarde van x van nul verschilt, zodat het evenwicht in elk geval stabiel zal zijn. De uitdrukking (10a) kunnen we door een partiële integratie en door gebruik te maken van de randvoorwaarde (9) voor w herleiden tot

$$\delta U = \int_{-a}^{a} \left(-S \frac{d^2w}{dx^2} + kw - q\right) \delta w \, d x \, . \tag{11}$$

Indien nu het systeem in evenwicht is, zal voor èlk verloop van δw als functie van x $\delta U = 0$ moeten zijn. Dit is indien we aannemen dat de verplaatsing w en haar eerste en tweede afgeleiden in het interval $-a \leq x \leq a$ continue functies van x zijn, alleen mogelijk als de uitdrukking tussen haakjes gelijk is aan nul, en we vinden zodoende dat w bepaald is door de differentiaalvergelijking

$$-S \frac{d^2w}{dx^2} + k w - q = 0 \, , \tag{12}$$

terwijl de bijbehorende randvoorwaarden (9) reeds waren opgeschreven. Zulk een differentiaalvergelijking die met behulp van een variatieproces voortvloeit uit de voorwaarde dat een bepaalde integraal van een functie van de afhankelijk variabele en van een of meerdere afgeleiden ervan stationnair is, heet differentiaalvergelijking van Euler. Het behoeft geen betoog dat zo'n differentiaalvergelijking ook rechtstreeks uit het evenwicht van een elementair deeltje van het systeem is af te leiden. Men vindt zonder moeite dat de oplossing van het probleem luidt

$$w = \frac{q}{k} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{\frac{k}{S}}}{\operatorname{ch} a\sqrt{\frac{k}{S}}}\right) \, . \tag{13}$$

Wij staan nog even stil bij de randvoorwaarden (9). Deze hielden verband met de geometrische eigenschappen van het systeem, met de z.g. verbindingen. Dergelijke voorwaarden noemt men geometrische (ook wel: kinematische) voorwaarden; in het Duits spreekt men van "Zwangsbedingungen", en in het Engels van "essential" of "imposed conditions". Daarnaast kennen we voorwaarden die uit het variatieproces volgen, zoals de voorwaarde die door de differentiaalvergelijking (12) wordt uitgedrukt. Zulke voorwaarden noemt men dynamische of natuurlijke voorwaarden; Duits: "dynamische" of "natürliche Konditionen"; Engels: "additional" of "natural conditions". Dergelijke voorwaarden kunnen randvoorwaarden zijn, maar ook voorwaarden als degene die door de differentiaalvergelijking van Euler worden vastgelegd.

3. De transformatie van Friedrichs. Friedrichs [1] heeft nu laten zien dat het mogelijk is naast elk variatieprobleem als het in het vorige nummer besprokene een tweede probleem te formuleren, dat ten opzichte van het eerste complementair is. Deze transformatie berust erop dat men de afgeleide van de afhankelijk variabele als een tweede afhankelijk variabele beschouwt.

Dit kan geschieden door voor dw/dx b.v. w' te schrijven en dan w' als een nieuwe afhankelijk variabele aan te zien. Bij mechanische problemen is het echter in het algemeen mogelijk een mechanische grootheid aan te wijzen die evenredig met zulk een afgeleide is. In het onderhavige geval kan men daar~~om~~voor de "dwarskracht" D, d.i. de vertikale component van de snaarkracht S die in een bepaalde doorsnede door het ene snaargedeelte op het andere uitgeoefend wordt, nemen; immers is overeenkomstig figuur 1

$$D = -S\,\frac{dw}{dx}\;. \tag{1}$$

De voorwaarde (1) is als een dynamische voorwaarde te beschouwen. Vervangen we echter in (2,8) dw/dx door $-D/S$, dan moeten we bedenken dat we U alleen dan als functie van de beide variabelen w en D kunnen beschouwen als steeds aan de voorwaarde (1) voldaan blijft. In verband daarmede moeten we nu (1) als een geometrische voorwaarde gaan opvatten, zodat de variaties van w en van D niet meer volkomen willekeurig zijn. De variatierekening leert nu dat men deze variaties als volkomen willekeurig mag blijven beschouwen, indien men U (2,8) aanvult met een bedrag

$$\int_{-a}^{a} \lambda\left(\frac{dw}{dx} + \frac{D}{S}\right) dx\;, \tag{2}$$

waarbij λ een z.g. onbepaalde vermenigvuldiger van Lagrange is, die eveneens als een functie van x beschouwd moet worden. Ook op λ moet het variatieproces betrokken worden.

Wij schrijven zodoende

$$U = \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{1}{2}\,S\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\,kw^2 - q\,w + \lambda\,\frac{dw}{dx} + \lambda\,\frac{D}{S} \right\} dx\;. \tag{3}$$

Vervangt men in de eerste term dw/dx door $-D/S$, en werkt men de

---

1) K. Friedrichs. Ein Verfahren der Variationsrechnung, Nachrichten der Ges.d.Wiss. zu Göttingen (1929), S.13-20.

vierde term door middel van een partiële integratie uit, onder toepassing van de geometrische randvoorwaarden (2,9), dan komt er

$$U(w,D;\lambda) = \int_{-a}^{a} \left(\frac{D^2}{2S} + \frac{1}{2} kw^2 - q\, w - w \frac{d\lambda}{dx} + \lambda \frac{D}{S}\right) dx. \tag{4}$$

Bij deze uitdrukking zijn de variaties δw, δD en $\delta \lambda$ aan geen enkele beperkende voorwaarde meer gebonden.
Het variatieproces levert nu

$$\delta U = \int_{-a}^{a} \left\{ \left(- \frac{d\lambda}{dx} + kw - q\right) \delta w + \frac{D+\lambda}{S}\, \delta D - w \frac{d\,\delta\lambda}{dx} + \frac{D}{S}\, \delta\lambda \right\} dx. \tag{5}$$

Uit het feit dat δD willekeurig is, volgt nu

$$\lambda = - D \, , \tag{6a}$$

terwijl het feit dat δw willekeurig is, daarna de voorwaarde

$$\frac{d\,D}{d\,x} + k\, w - q = 0 \tag{6b}$$

oplevert. Nu kunnen echter λ(6a) en w(6b) in U (4) worden ingevuld, en het resultaat hiervan luidt:

$$U = - \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{D^2}{S} + \frac{\left(\frac{dD}{dx} - q\right)^2}{k} \right\} dx \, . \tag{7}$$

Zodoende is het ons gelukt om de variabele w volledig te elimineren, en we vinden dat U slechts een functie is van de ene afhankelijk variabele D. Wij kunnen nu op U (7) ons variatieproces toepassen, waarbij in ons geval de nieuwe variabele D aan geen enkele geometrische voorwaarde is gebonden. (Meestal is ook bij het duale probleem de afhankelijk variabele aan geometrische voorwaarden gebonden.) Derhalve is het resultaat

$$\delta U = \int_{-a}^{a} \left(\frac{1}{k} \frac{d^2 D}{dx^2} - \frac{D}{S}\right) \delta D \, d\,x - \left(\frac{dD}{dx} - q\right) \delta D \Big|_{-a}^{a} \, . \tag{8}$$

Uit de willekeurigheid van δD in het gebied $-a \leqq x \leqq a$ volgt de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 D}{dx^2} - \frac{k\, D}{S} = 0 \, , \tag{9}$$

en uit de willekeurigheid van δD voor $x = \pm\, a$ vloeien de randvoorwaarden

$$\frac{dD}{dx} = q \qquad x = \pm a \tag{10}$$

voort. De differentiaalvergelijking (9) en de randvoorwaarden (10) vormen beide dynamische voorwaarden voor het complementaire probleem.

Uit (7) volgt

$$\delta^2 U = -\frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{(\delta D)^2}{S} + \frac{1}{k} \left(\frac{d\delta D}{dx}\right)^2 \right\} dx \ . \tag{11}$$

Hieruit zien we dat als D aan de voorwaarden(9) en (10) voldoet, en het systeem dus in evenwicht is, U een maximum vertoont. Nu werkt men bij dergelijke complementaire problemen vaak met de z.g. "complementaire energie"

$$U^* = \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{D^2}{S} + \frac{1}{k} \left(\frac{dD}{dx} - q\right)^2 \right\} dx \ , \tag{12}$$

in plaats van met de potentiële energie U, en deze complementaire energie zal bij een evenwichtsstand van het systeem een minimum vertonen. Dit beginsel van het minimum der complementaire energie staat dus duaal tegenover het beginsel van het minimum der potentiële energie. De uitdrukking voor de~~ze~~ complementaire energie is, zoals vrijwel steeds in dergelijke gevallen, zonder het transformatieproces uit te voeren ook rechtstreeks op te schrijven. Voorts blijken de geometrische randvoorwaarden (2,9) voor w te corresponderen met de dynamische randvoorwaarden (10) voor D.

Het begrip complementaire energie schijnt het eerst te zijn toegepast door Engesser [1] in 1889. Alleen bij lineaire problemen zoals het onderhavige geldt

$$U^* = -U \ . \tag{13}$$

De transformatie van Friedrichs is eigenlijk een bijzonder geval van de z.g. transformatie van Legendre. Haar duale karakter wordt, behalve door het feit dat de geometrische voorwaarden van het ene probleem corresponderen met de dynamische voorwaarden van het andere probleem en omgekeerd, ook onderstreept door het feit dat door een overeenkomstige transformatie het oorspronkelijke probleem uit het complementaire is terug te vinden. Daartoe behoeven we in U^* (12) overeenkomstig (6b) slechts dD/dx door w te vervangen:

---

1) F. Engesser, Ueber statisch unbestimmten Träger bei beliebigem Formänderungs-Gesetze und über den Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit, Z.Arch.-u. Ing.-Ver. Hannover, 35 (1889), S.773-744.

$$U^* = \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{D^2}{2S} + \frac{1}{2} kw^2 + \mu\left(\frac{dD}{dx} + kw - q\right) \right\} dx \ . \tag{14}$$

Hieruit volgt:

$$\delta U^* = \int_{-a}^{a} \left\{ \left(\frac{D}{S} - \frac{d\mu}{dx}\right) \delta D + k(w+\mu)\,\delta w + \left(\frac{dD}{dx} + kw - q\right)\delta\mu \right\} dx + \mu\,\delta D \Big]_{-a}^{a} \ ; \tag{15}$$

uit de willekeurigheid van δD en δw vindt men

$$\mu = -w \ , \tag{16}$$

en komen de geometrische voorwaarden van het oorspronkelijke probleem

$$D = -S\,\frac{dw}{dx} \ , \quad w = 0 \quad \text{voor } x = \pm\, a \tag{17}$$

thans als natuurlijke voorwaarden van het complementaire probleem te voorschijn.

4. <u>Het beginsel van Castigliano. Eerste toepassing.</u> Intussen zijn voor de theoretisch werkzame technicus de in het vorige nummer uiteengezette problemen niet alleen interessant vanwege hun fraaie wiskundige vorm, maar vooral ook vanwege hun belangrijke toepassingsmogelijkheden bij berekeningen van mechanische constructies.

Dergelijke constructies zijn vaak z.g. statisch onbepaald, d.w.z.: er treden krachten in op die niet alleen met behulp van evenwichtsoverwegingen bepaald kunnen worden. Een eenvoudig voorbeeld ervan is in figuur 2 weergegeven. In dergelijke gevallen blijkt, zoals we zullen zien, het beginsel van het minimum der complementaire energie een eenvoudiger vorm dan het beginsel van het minimum der potentiële energie aan te nemen, en het is derhalve dan vaak van groot voordeel van het eerstgenoemde beginsel uit te gaan. We merken hierbij nog op dat voor dergelijke constructies Castigliano [1] reeds in 1879 het beginsel heeft aangegeven, en in de sterkteleer staat het daarom algemeen bekend als "het beginsel van Castigliano".

In figuur 2 fg14 is een aan de linkerzijde ingeklemde balk getekend, die aan de rechterzijde scharnierend is opgelegd en aldaar

---

1) A. Castigliano, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications, Turin et Paris (1879), 480 pp. 15 pl.

is belast door een moment M_1. Is l de lengte van de balk, dan bedraagt de inwendige potentiële energie

$$U_i = \frac{1}{2}\int_0^l M \frac{d^2w}{dx^2}\,dx \,, \tag{1a}$$

terwijl de uitwendige potentiële energie gelijk is aan

$$U_e = -M_1\, w'_1 \,, \tag{1b}$$

zodat de totale potentiële energie

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l M \frac{d^2w}{dx^2}\,dx - M_1\, w'_1 \tag{2}$$

bedraagt. Is nu EI de (constant gedachte) buigstijfheid, dan luidt het verband tussen de vertikale verplaatsing w en het buigend moment M

$$M = E\,I\,\frac{d^2w}{dx^2} \,. \tag{3}$$

In tegenstelling met hetgeen we tot nu toe zagen treedt thans in de uitdrukking voor de potentiële energie een tweede afgeleide van de afhankelijk variabele op. Dit brengt echter geen essentiële moeilijkheden met zich mede, en men kan gemakkelijk het vraagstuk voor de doorbuiging w en het complementaire vraagstuk voor het buigend moment M formuleren. Het resultaat geven we in een vorm weer die het duale karakter van beide vraagstukken duidelijk naar voren brengt.

Oorspronkelijk probleem	Complementaire probleem
potentiële energie	complementaire energie
$U = \frac{1}{2}\,EI\int_0^l \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx - M_1 w'_1$ (4a)	$U^* = \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2\,dx$ (4b)
geometrische voorwaarden	natuurlijke voorwaarden
$\left.\begin{array}{l} w = 0 \text{ voor } x = 0 \text{ en } x = l \\ \frac{dw}{dx} = 0 \text{ voor } x = 0 \end{array}\right\}$ (5)	ontbreken
natuurlijke voorwaarden	geometrische voorwaarden
$\frac{d^4w}{dx^4} = 0$ (6a)	$\frac{d^2M}{dx^2} = 0$ (6b)
$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M_1}{EI}$ voor $x = l$ (7a)	$M = M_1$ voor $x = l$ (7b)

Het oplossen van het oorspronkelijke probleem vereist een integratie van de differentiaalvergelijking van de vierde orde (6a) voor w, waarbij de vier integratieconstanten met behulp van de vier randvoorwaarden (5) en (7a) bepaald moeten worden.

Daarentegen behoeft men bij het complementaire probleem slechts de differentiaalvergelijking van de tweede orde (6b) op te lossen. Eén van de beide integratieconstanten vindt men dan uit de randvoorwaarde (7b). De dan verkregen uitdrukking voor M substitueert men in de uitdrukking (4b) voor de complementaire energie. Deze wordt dan een functie van deze integratieconstante, dus van één enkele variabele, en het variatieprobleem reduceert zich zodoende tot een gewoon minimumprobleem.

Meestal richt men het zo in dat de overblijvende integratieconstante een bepaalde mechanische betekenis heeft. Zo is de uitdrukking voor M, die aan (6b) en (7b) voldoet en tevens voor $x = 0$ gelijk wordt aan het inklemmoment M_o:

$$M = M_o \frac{l-x}{l} + M_1 \frac{x}{l} . \qquad (8)$$

Invullen hiervan in (4b) levert

$$U^* = \frac{1}{6EI} (M_o^2 + M_o M_1 + M_1^2) . \qquad (9)$$

Nu neemt U^* als functie van M_o een minimum aan indien

$$\frac{d\ U^*}{d\ M_o} = 0 , \qquad (10)$$

en dit levert de waarde

$$M_o = -\frac{1}{2} M_1 \qquad (11)$$

voor M_o. Zulk een grootheid als M_o noemt men een statisch onbepaalde.

Men kan natuurlijk als statisch onbepaalde grootheid ook een andere kracht of een ander moment kiezen, b.v. de oplegkracht in het scharnier.

Het beginsel van Castigliano heeft steeds voordelen boven het beginsel van het minimum van de potentiële energie als de uitdrukking voor de complementaire energie geen afgeleiden van de afhankelijk variabelen bevat. In zulke gevallen is het variatieprobleem dus steeds tot een gewoon minimumprobleem terug te brengen. In het onderhavige geval (dat met opzet zeer eenvoudig was gekozen) bleef er slechts één enkele integratieconstante of statisch onbepaalde over. Bij ingewikkelder problemen zijn er meestal een aantal statisch onbepaalden in het spel.

5. Tweede toepassing. Het beginsel van Castigliano, c.q. dat van de complementaire energie, heeft de laatste tijd nog een andere, zeer belangrijke, toepassing gevonden, die we als volgt kunnen beschrijven.

Voor het merendeel der randwaardeproblemen op het gebied van de elasticiteitsleer kan geen exacte oplossing aangegeven worden, en men is aangewezen op benaderingsmethoden. Een zeer bruikbare methode is die van Ritz, die er op neerkomt dat men in de uitdrukking voor de potentiële energie U voor de verplaatsingen een (doorgaans lineaire) combinatie van een aantal functies van de onafhankelijk variabele(n) en een aantal parameters substitueert. Deze functies moeten ieder op zichzelf aan de geometrische voorwaarden van het probleem voldoen. Heeft men nu met lineaire problemen te maken, hetgeen bij dergelijke randwaardeproblemen zeer vaak het geval is, dan zal de potentiële energie de integraal van een quadratische functie van de verplaatsingen zijn, en zal deze energie een minimum aannemen, als de verplaatsingen aan de differentiaalvergelijking(en) van Euler en tevens aan de natuurlijke randvoorwaarden voldoen, m.a.w. als de verplaatsingen de exacte oplossing van het probleem vormen. Heeft men derhalve een benaderingsoplossing gevonden, en berekent men de bijbehorende waarde van de potentiële energie, dan weet men met zekerheid dat deze waarde te groot is, en dus een bovengrens voor de exacte waarde voorstelt.

Kende men nu tevens de waarde van de potentiële nergie, dan zou men zich een indruk kunnen vormen omtrent de graad van de benadering. Echter is nu juist in de gevallen, waarin men zich van een benaderingsmethode bedient, de exacte oplossing niet bekend.

Maar nu kan men met groot voordeel van het beginsel van de complementaire energie gebruikmaken. Immers zagen we reeds dat bij lineaire problemen de complementaire energie gelijk is aan het tegengestelde van de potentiële energie. Ook de complementaire energie neemt een minimum aan als de afhankelijk variabele(n) gelijk is (zijn) aan de waarden die bij het evenwicht behoren. Construeert men nu een benaderingsoplossing door uit te gaan van de complementaire energie, en berekent men daarvoor de bijbehorende waarde van deze energie, dan weet men dat deze waarde een bovengrens voorstelt voor de werkelijke waarde van de complementaire energie. Het tegengestelde van deze benaderingswaarde stelt derhalve een benedengrens voor van de werkelijke waarde van de potentiële energie. Zodoende is men nu in staat om twee grenzen aan te geven tussen welke de werkelijke waarde van de potentiële energie moet liggen.

We lichten e.e.a. toe aan het reeds in de nummers 2 en 3 behandelde voorbeeld. Daartoe bepalen we eerst een benaderingsoplossing voor het oorspronkelijke probleem, en we stellen

$$w = c(a^2 - x^2) \quad . \tag{1}$$

Dit is een benaderingsoplossing die aan de geometrische randvoorwaarden (2,9) voldoet. De constante c is een parameter die we nu laten variëren. Substitutie van (1) in de uitdrukking (2,8) voor de potentiële energie en uitvoering van de integratie levert na enig gereken

$$U = \frac{4}{3} a^3 \left\{ (S + \frac{2}{5} ka^2)\ c^2 - qc \right\} \tag{2}$$

De beste oplossing zal nu verkregen worden als

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial c} \delta c \tag{3}$$

gelijk nul wordt voor elke willekeurige waarde van δc. Zodoende is c bepaald door de vergelijking

$$\frac{\partial U}{\partial c} = \frac{4}{3} a^3 \left\{ 2(S + \frac{2}{5} ka^2)\ c - q \right\} = 0, \tag{4}$$

zodat

$$c = \frac{q}{2S + \frac{4}{5} ka^2} \tag{5}$$

Invulling hiervan in (1) levert de gezochte benaderingsoplossing. De bijbehorende waarde van de potentiële energie is gelijk aan

$$U_{ben.} = -q^2 \sqrt{\frac{S}{k^3}}\ \frac{\alpha^3}{3 + \frac{6}{5}\alpha^2} \tag{6}$$

waarbij ter afkorting

$$\alpha = a \sqrt{\frac{k}{S}} \tag{7}$$

gesteld is.

Vervolgens gaan we uit van de complementaire energie (3,12), en we substitueren hierin, gebruikmakende van het feit dat D aan geen enkele geometrische voorwaarde is gebonden,

$$D = c^* x \ . \tag{8}$$

Dit levert

$$U^* = \frac{c^{*2} a^3}{3S} + \frac{a(c^* - q)^2}{k} \tag{9}$$

Op analoge wijze als hierboven bepalen we nu c^* met behulp van de voorwaarde

$$\frac{\partial U^*}{\partial c^*} = 0 \ , \tag{10}$$

en vinden

$$c^* = \frac{q}{1 + \frac{a^2 k}{3S}} \ . \tag{11}$$

Aldus is met (8) een benaderingsoplossing voor de kracht D gevonden.

De bijbehorende waarde van de complementaire energie is nu

$$U^*_{ben.} = q^2 \sqrt{\frac{S}{k^3}} \, \frac{\alpha^3}{3+\alpha^2} \ . \tag{12}$$

Vergelijkingen we nu de uitdrukkingen (6) en (12), dan zien we dat inderdaad steeds geldt

$$U_{ben.} \geqq - U^*_{ben.} \tag{13}$$

Voor kleine waarden van α is het verschil tussen de beide benaderingen nihil; voor grote waarden is $U_{ben.}$ 20% groter dan $U^*_{ben.}$.

In het onderhavige geval kan men ook de exacte oplossing aangeven. Neemt men voor w de exacte waarden dan kan U (2,8) door partiële integratie met behulp van (2,9) en (2-12) herleid worden tot

$$U = -\frac{1}{2} q \int_{-a}^{a} w dx \ , \tag{14}$$

en men vindt door substitutie van w (2,13)

$$U_{ex.} = -q^2 \sqrt{\frac{S}{k^3}} (\alpha - \text{th } \alpha) . \tag{15}$$

Voor kleine waarden van α is

$$\left.\begin{aligned} U_{ex.} &= -q^2\sqrt{\frac{S}{k^3}}\,\frac{1}{3}\,\alpha^3\,(1-\frac{2}{5}\,\alpha^2+\ldots),\\ U_{ben.} &= -q^2\sqrt{\frac{S}{k^3}}\,\frac{1}{3}\,\alpha^3\,(1-\frac{2}{5}\,\alpha^2+\ldots),\\ U^*_{ben.} &= q^2\sqrt{\frac{S}{k^3}}\,\frac{1}{3}\,\alpha^3\,(1-\frac{1}{3}\,\alpha^2+\ldots), \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

terwijl voor grote waarden van α geldt

$$\left.\begin{aligned} U_{ex.} &\doteq -q^2\sqrt{\frac{S}{k^3}}\,\alpha\,(1-{}^1/\alpha),\\ U_{ben.} &= -q^2\sqrt{\frac{S}{k^3}}\,\frac{5}{6}\,\alpha\,(1-\frac{5}{2\alpha^2}),\\ U^*_{ben.} &= q^2\sqrt{\frac{S}{k^3}}\,\alpha\,(1-\frac{3}{\alpha^2}). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

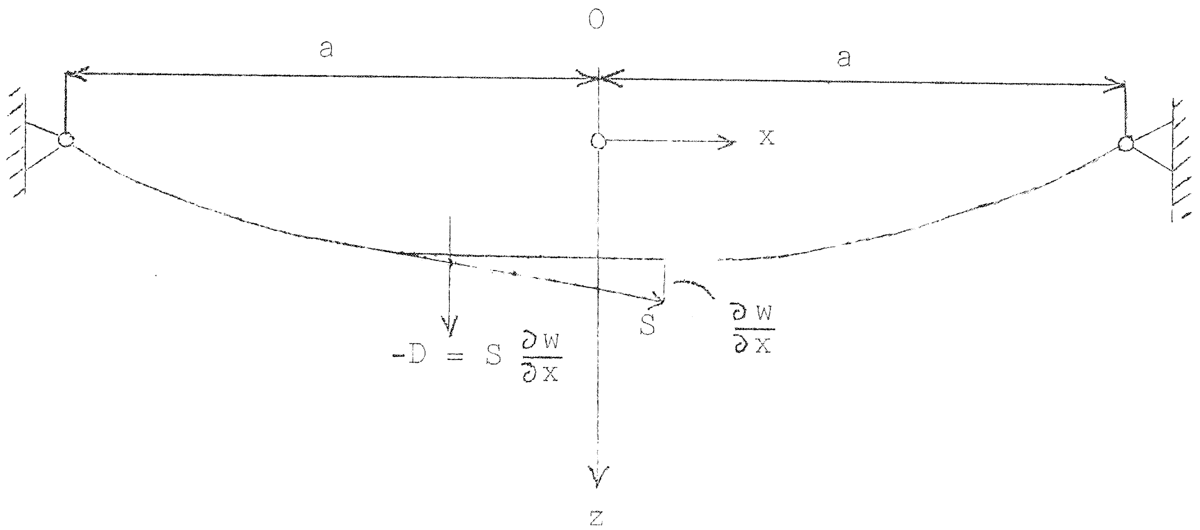

Fig.1. De kracht die het rechter gedeelte van de snaar op het linker gedeelte uitoefent.

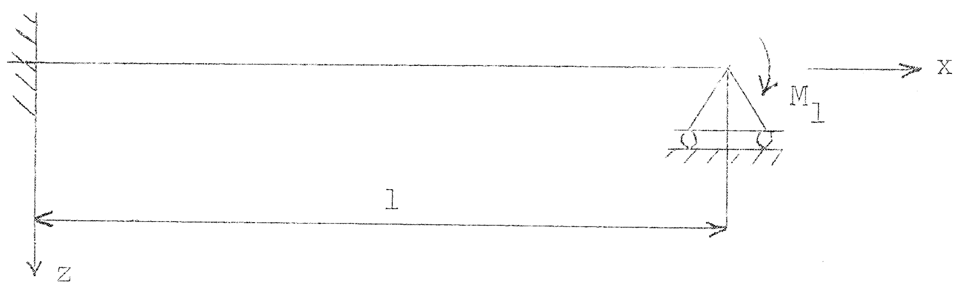

Fig.2. Een statisch onbepaald vraagstuk.

In beide gevallen geldt inderdaad

$$U_{ben.} \geqq U_{ex.} \geqq -U^{*}_{ben.} \tag{18}$$

Vaak wordt bij dergelijke problemen gevraagd een bepaalde constante te berekenen, in de formule waarvoor de uitdrukking voor de potentiële energie ingevoerd kan worden. Zo kan men in het onderhavige geval vragen naar de gemiddelde stijfheid van de snaar, gedefinieerd door het quotient van de kracht 2 qa die op de snaar werkt en de gemiddelde zakking

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} wdx \ . \tag{19}$$

Deze stijfheid is dan gelijk aan

$$C = \frac{4q\ a^2}{\int_{-a}^{a} wdx} , \tag{20}$$

en met (14) kan men hiervoor schrijven

$$C = \frac{2q^2 a}{-U} . \tag{21}$$

In verband met het voorgaande kan men nu zowel een boven- als een benedengrens voor de stijfheid afleiden:

$$\frac{q^2 a}{U^{*}_{ben.}} \leqq C \leqq \frac{q^2 a}{-U_{ben.}} . \tag{22}$$

<u>6. De algemene vorm van het beginsel van Castigliano.</u> Volledigheidshalve geven we nu nog de algemene uitdrukkingen aan voor de potentiële energie en de complementaire energie van een driedimensioneel elastisch lichaam, zonder daarbij uitvoerig op details in te gaan. Daarbij nemen we aan dat het lichaam in de rusttoestand het gebied V van de (x,y,z) ruimte inneemt. Uit deze rusttoestand wordt het lichaam door een krachtenstelsel in een nieuwe evenwichtstoestand gebracht, waarbij elk punt (x,y,z) een verplaatsing met de componenten u,v en w ondergaat. Tengevolge hiervan ontstaan de elastische rekken

$$\left.\begin{array}{lll} e_{11} = u_x, & e_{12} = \frac{1}{2}(u_y+v_x), & e_{13} = \frac{1}{2}(u_x+w_x), \\ e_{21} = \frac{1}{2}(v_x+u_y), & e_{22} = v_y, & e_{23} = \frac{1}{2}(v_z+w_y), \\ e_{31} = \frac{1}{2}(w_x+u_z), & e_{32} = \frac{1}{2}(w_y+v_z), & e_{33} = w_z, \end{array}\right\} \quad (1)$$

en de spanningen s_{ij} $(i = 1,\ldots 3;\ j = 1,\ldots 3)$, die met de rekken samenhangen volgens de wet van Hooke:

$$\left.\begin{array}{ll} s_{ij} = \frac{E}{1+\nu} e_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e & \text{voor } i = j \\ s_{ij} = \frac{E}{1+\nu} e_{ij} & \text{voor } i \neq j \end{array}\right\} \begin{array}{l}(i=1,\ldots 3; \\ j=1,\ldots 3)\end{array} \quad (2)$$

waarbij E de elasticiteitsmodulus van het materiaal voorstelt, en ν de dwarscontractiecoëfficient is, terwijl e gedefinieerd is door

$$e = e_{11} + e_{22} + e_{33} . \quad (3)$$

Verder nemen we aan dat in het lichaam volumenkrachten aangrijpen, waarvan de grootte per volumeneenheid door de componenten F_1, F_2, F_3 aangegeven kan worden, en veronderstellen we dat in elk punt (x,y,z) van de rand een kracht aangrijpt, waarvan de grootte per eenheid van oppervlak de componenten p_1, p_2, p_3 bezit. Ook nemen we aan dat op het gedeelte A_1 van de rand de oppervlaktekrachten p_1, p_2, p_3 en op ~~een~~ het andere gedeelte A_2 de verplaatsingen zijn voorgeschreven.

De potentiële energie kan nu opgevat worden als een functie van de verplaatsingen:

$$U[u,v,w] = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} e_{ij} s_{ij}\right) dx\,dy\,dz +$$
$$- \iiint_V (F_1 u + F_2 v + F_3 w) dx\,dy\,dz - \iint_{A_1} (p_1 u + p_2 v + p_3 w)\, d\,A, \quad (4a)$$

waarbij de spanning s_{ij} volgens (2) in de rekken e_{ij}, en daarna de rekken e_{ij} volgens (1) in de verplaatsingen zijn uit te drukken. Varieert men nu de verplaatsingen u,v,w met bedragen δu, δv, δw, waarbij met de geometrische randvoorwaarden

$$u = \bar{u},\ v = \bar{v},\ w = \bar{w} \quad \text{op } A_2 \quad (5)$$

rekening dient te worden gehouden, dan leidt ook nu de voorwaarde $\delta U = 0$ tot de natuurlijke voorwaarden van het vraagstuk. Dat zijn in dit geval de evenwichtsvergelijkingen voor een punt in het lichaam:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial s_{11}}{\partial x} + \frac{\partial s_{21}}{\partial y} + \frac{\partial s_{31}}{\partial z} + F_1 = 0, \\ \frac{\partial s_{12}}{\partial x} + \frac{\partial s_{22}}{\partial y} + \frac{\partial s_{32}}{\partial z} + F_2 = 0, \\ \frac{\partial s_{13}}{\partial x} + \frac{\partial s_{23}}{\partial y} + \frac{\partial s_{33}}{\partial z} + F_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

en de evenwichtsvergelijkingen voor een op de rand gelegen punt

$$\begin{aligned} s_{11}\, x_n + s_{21}\, y_n + s_{31}\, z_n - p_1 = 0, \\ s_{12}\, x_n + s_{22}\, y_n + s_{32}\, z_n - p_2 = 0, \\ s_{13}\, x_n + s_{23}\, y_n + s_{33}\, z_n - p_3 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Voorts blijkt de tweede variatie van U nooit negatief te kunnen worden, zodat de potentiële energie ook nu weer een minimum aanneemt als de verplaatsingen niet alleen aan de geometrische, maar ook aan de natuurlijke voorwaarden voldoen.

Daarnaast kan men de potentiële energie opvatten als een functie van de spanningen, en ook hier zal men dan het doelmatigst uitgaan van de complementaire energie:

$$U^*[s_{ij}] = -U\,[s_{ij}] = \tag{4b}$$
$$= \frac{1}{2} \iiint_V \left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} e_{ij}\; s_{ij} \right) dx\; dy\; dz - \iint_{A_2} (\bar{p}_1 \bar{u} + \bar{p}_2 \bar{v} + \bar{p}_3 \bar{w})\, d\,A\;.$$

Hierbij moet men volgens (2) de rekken e_{ij} en volgens (7) de randbelastingen $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$ beide in de spanningen s_{ij} uitdrukken. Varieert men nu de spanningen s_{ij} met bedragen δs_{ij}, en houdt men daarbij met de evenwichtsvoorwaarden (6) rekening, dan leidt de voorwaarde $\delta \bar{U}^* = 0$ tot de z.g. compatibiliteitsvergelijkingen.

$$\left.\begin{aligned}
\nabla^2 s_{11} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + 2\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) &= 0,\\
\nabla^2 s_{22} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + 2\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) &= 0,\\
\nabla^2 s_{33} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + 2\frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) &= 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (8a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\nabla^2 s_{12} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 0,\\
\nabla^2 s_{23} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial y} &= 0,\\
\nabla^2 s_{31} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z} &= 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (8b)$$

met

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,, \quad s = s_{11} + s_{22} + s_{33}\;. \qquad (9)$$

De uitdrukking (4b) voor de complementaire energie kan uit de uitdrukking (4a) voor de potentiële energie worden afgeleid door in (4a) de verplaatsingen door de spanningen te vervangen en daarbij met behulp van de methode van de onbepaalde vermenigvuldigers bij het variatieproces rekening te houden met de natuurlijke voorwaarden (6) en (7). Op overeenkomstige wijze kan de uitdrukking voor de potentiële energie uit die voor de complementaire energie worden afgeleid.

Literatuur:

1. R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, I, Berlin (1931), p.199-233.
2. C.B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin (1939), p.72-77.
3. S. Crandall, Engineering analysis, New York, Toronto and London (1956), p.195-243.
4. I.S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, New York, Toronto and London (1956), p.382-390.