STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1960 - 009

Voordracht in de serie : "Actualiteiten"

Dr. C.G. Lekkerkerker

26 november 1960

Een eigenschap van matrices

1960

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1960-009

Een eigenschap van matrices
Voordracht in de serie "Actualiteiten"

door
Dr. C.G. Lekkerkerker

26 november 1960

Bij een probleem betreffende simultane diofantische approximaties - waar we aan het eind kort op in zullen gaan - bleek de volgende approximatieëigenschap van matrices een belangrijke rol te spelen.

Stelling. Laten n,r,s natuurlijke getallen zijn met $n=r+s$, en zij A een reële, niet-singuliere $n \times n$-matrix. Dan geldt: is $\varepsilon > 0$ en zijn N,M voldoend grote positieve getallen met $N^r M^{-s} = |\det A|$, dan bestaat er een gehele, unimodulaire matrix P, zó dat AP de volgende vorm heeft:

$$(1)\quad AP = \begin{pmatrix} N(I_r+D) & N(I_r+D)X \\ Y & YX+M^{-1}(I_s+E) \end{pmatrix},$$

waarin I_r, I_s de eenheidsmatrices van de orde r, resp. s zijn, de elementen van D en E alle van de vorm $O\,(\max(N^{-1+\varepsilon}, M^{-1+\varepsilon}))$ zijn en X,Y een zekere $r \times s$-matrix, resp. $s \times r$-matrix zijn.

We kunnen deze stelling op een andere manier uitdrukken als we A interpreteren als basis van een rooster in de n-dimensionale, euclidische ruimte R_n. Laat $e^{(1)},\dots,e^{(n)}$ de eenheidsvectoren in R_n zijn, u een willekeurige gehele vector en $a^{(1)},\dots,a^{(n)}$ de kolommen van A. De punten u vormen een rooster Λ_0. De punten Au vormen een rooster $\Lambda = A\Lambda_0$, met determinant $d(\Lambda) = |\det A|$. De kolommen van elke matrix AP, waarbij P geheel en unimodulair is, vormen een basis van Λ. Dan zegt de stelling dat een willekeurig rooster $\Lambda = A\Lambda_0$ een basis $AP=B=\{b^{(1)},\dots,b^{(n)}\}$ heeft, zodanig dat geldt:

1) de eerste r basisvectoren $b^{(1)},\dots,b^{(r)}$ zijn in de eerste r coördinaten ongeveer gelijk aan $Ne^{(1)},\dots,Ne^{(r)}$.

2) modulo de lineaire deelruimte, voortgebracht door $b^{(1)},\dots,b^{(r)}$, zijn de laatste s basisvectoren $b^{(r+1)},\dots,b^{(n)}$ ongeveer gelijk aan $M^{-1}e^{(r+1)},\dots,M^{-1}e^{(n)}$.

In het volgende zullen we de verschillende punten aanstippen, die bij het bewijs van de stelling aan de orde komen.

1. De gevallen $r=1$ en $s=1$. Deze zijn behandeld door Davenport [1]. Hij begint zijn artikel over simultane approximaties met een stelling

te bewijzen, waarin zoveel mogelijk elementen van een voldoend groot veelvoud van een gegeven matrix worden benaderd door elementen van een gehele, unimodulaire matrix. En wel vindt hij:

Lemma. Zij $\tilde{B} = (b_{ij})$ een willekeurige, reële $r \times (r-1)$-matrix. Dan bestaat er, als $\varepsilon > 0$ en N voldoende groot is, een gehele $r \times (r-1)$- matrix $\tilde{P}_1 = (p_{ij})$, zó dat

1°. $|p_{ij} - N b_{ij}| < N^{\varepsilon}$ voor $i=1,\dots,r$ en $j=1,\dots,r-1$

2°. voor $k=1,\dots,r-1$ zijn de twee determinanten

$$\alpha_k = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}, \qquad \beta_k = \begin{vmatrix} p_{21} & \cdots & p_{2k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{k+1,1} & \cdots & p_{k+1,k} \end{vmatrix}$$

onderling ondeelbaar.

Is nu A een gegeven $n \times n$-matrix met $\det A \neq 0$ en past men het lemma toe, met $r=n$, op de eerste $n-1$ kolommen van $B=A^{-1}$, dan komt men (na aanvulling van $\tilde{P}_1$ tot een volle matrix en na vóórvermenigvuldiging met A) tot de stelling in het geval $s=1$. Toepassing van het lemma op de eerste $n-1$ kolommen van de getransponeerde van A leidt tot de stelling in het geval $r=1$. We zullen in het volgende steeds onderstellen dat r en $s > 1$ zijn.

2. Notaties en toegestane restricties.

De inverse van de gezochte matrix P noemen we Q. De voorkomende $n \times n$-matrices splitsen we steeds in 4 deelmatrices door zowel de rijen als de kolommen te splitsen in groepen van opvolgend r en s rijen, resp. kolommen. Zo schrijven we

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & P_3 \\ P_2 & P_4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}.$$

We zullen in het volgende verschillende rij- en kolomvectoren beschouwen, met r of met s componenten, in de regel met tussen haakjes geplaatste indices (benedenindices voor rijen, bovenindices voor kolommen).

Door A na te vermenigvuldigen met een geschikte gehele, unimodulaire matrix kunnen we een willekeurige permutatie van de kolommen van A teweegbrengen en ook een willekeurige kolom met -1 vermenigvuldigen. Het is dus geen beperking om te onderstellen dat

(2) $\qquad \det A_1 \neq 0, \quad \det A > 0.$

Verder heeft het rechterlid van (1) de vorm

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ Z & I_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N(I_r+D) & N(I_r+D)X \\ 0 & M^{-1}(I_s+E) \end{pmatrix},$$

waarbij aan Z geen eisen opgelegd worden. Het is dus voldoende de stelling te bewijzen voor een of andere matrix

$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ Z & I_s \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ ZA_1+A_3 & ZA_2+A_4 \end{pmatrix}$. Dan is het geen beperking van de algemeenheid als we aannemen dat

(3) $$A_3 = 0.$$

3. Vergelijkingen voor P_1, P_2, Q_4. Stel eens dat AP de vorm (1) heeft, voor zekere P. Dan geldt, wegens (3),

(4) $$A_1P_1 + A_2P_2 = N(I_r+D), \quad A_4P_2 = Y.$$

Als we (1) voorvermenigvuldigen met $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -N^{-1}Y(I_r+D)^{-1} & I_s \end{pmatrix}$ en navermenigvuldigen met $Q=P^{-1}$, dan vinden we verder de volgende betrekking voor Q_4:

(5) $$A_4-N^{-1}Y(I_r+D)^{-1}A_2 = M^{-1}(I_s+E)Q_4.$$

Als we omgekeerd P zó bepaald hebben dat (4) en (5) gelden, met een zekere Y, dan heeft AP de vorm (1). Natuurlijk moeten we, als we direct P_1, P_2, Q_4 bepalen, er op letten dat P_1, P_2 enerzijds en Q_4 anderzijds kunnen worden aangevuld tot volle matrices die geheel en unimodulair zijn en elkaars inverse zijn.

4. Keuze van r-1 kolommen van P_1 en s-1 rijen van Q_4. We schrijven

$$\det A_1 = \alpha, \quad \det A_4 = \beta, \quad \text{zodat } \det A = \alpha\beta > 0.$$

We nemen N groot en definiëren M door $N^r M^{-s} = \alpha\beta$. We bepalen nu een gehele $r \times (r-1)$-matrix $\tilde{P}_1$ zó dat de voorwaarden 1° en 2° van het lemma gelden, als $(b_{ij})=A_1^{-1}$. Verder bepalen we, door het lemma toe te passen op de getransponeerde van A_4, een gehele $(s-1) \times s$-matrix $\tilde{Q}_4$ zó dat voldaan is aan de volgende eisen:

3°. $|Ma_{ij}-q_{ij}| < M^{\varepsilon}$ voor $i=r+1,\dots,n-1$ en $j=r+1,\dots,n$.

4°. voor $k=1,\dots,s-1$ zijn de determinanten

$$\gamma_k = \begin{vmatrix} q_{r+1,r+1} & \cdots & q_{r+1,r+k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{r+k,r+1} & \cdots & q_{r+k,r+k} \end{vmatrix}, \quad \delta_k = \begin{vmatrix} q_{r+1,r+2} & \cdots & q_{r+1,r+k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{r+k,r+2} & \cdots & q_{r+k,r+k+1} \end{vmatrix}$$

onderling ondeelbaar.

We voegen hier zonder bewijs aan toe dat men een matrix $\tilde{P}_1$ met de eigenschap 2^0. kan vóórvermenigvuldigen met een zodanige gehele $r\times r$-matrix met determinant 1, dat een matrix $\tilde{V}_1 = (v_{ij})$ ontstaat met

$$v_{ij} = 0 \text{ voor } i > j, \quad v_{jj} = 1 \quad (i=1,\dots,r; j=1,\dots,r-1).$$

Evenzo kan men uit $\tilde{Q}_4$ door navermenigvuldigen een matrix $\tilde{V}_4 = (v_{ij})$ krijgen, waarvoor

$$v_{ij} = 0 \text{ voor } j > i, \quad v_{ii} = 1 \ (i=r+1,\dots,n-1; \ j=r+1,\dots,n).$$

5. Decompositie van P_1 en Q_4. Laten we eens $\tilde{P}_1$ met een willekeurige gehele kolom aanvullen tot een $r\times r$-matrix P_1. Dan wordt de hierboven beschouwde matrix $\tilde{V}_1$ ook aangevuld met een of andere gehele kolom. Zij t_1 de laatste component daarvan. Dan is het duidelijk dat we voor P_1 een splitsing van de volgende vorm hebben:

(6) $$P_1 = R_1T_1S_1,$$

waarbij R_1 determinant 1 heeft, T_1 een diagonaalmatrix is met diagonaalelementen $1,\dots,1,t_1$ en S_1 een boven-driehoeksmatrix is met 1-en in de hoofddiagonaal. Alle matrices zijn geheel, t_1=det T_1=det P_1 en R_1 hangt niet af van de laatste kolom van P_1.

Op soortgelijke wijze vinden we een splitsing

(7) $$Q_4 = S_4T_4R_4,$$

waarbij S_4 een beneden-driehoeksmatrix is met 1-en in de hoofddiagonaal, T_4 een diagonaalmatrix met diagonaalelementen $1,\dots,1,t_4$=det T_4= = det Q_4 en R_4 determinant 1 heeft en niet afhangt van de laatste rij van Q_4.

6. Vorm van P_2; voldoende voorwaarden voor de aanvulling van P_1, P_2 tot P en van Q_4 tot Q. We zullen werken met een matrix P_2 die alleen in haar laatste kolom elementen $\neq 0$ heeft; zij die laatste kolom $\mathfrak{y}''$. De bepaling van P_1, P_2 en Q_4 moet zó zijn dat er matrices Q_1, Q_2, Q_3 bestaan met

$$Q_1P_1+Q_2P_2=I_r, \quad Q_3P_1+Q_4P_2=0, \quad \det\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix} = 1.$$

De eerste twee betrekkingen worden eenvoudiger als men in plaats van Q de matrix

$$Q' = \begin{pmatrix} Q'_1 & Q'_2 \\ Q'_3 & Q'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_4^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_4^{-1} \end{pmatrix}$$

beschouwt. Dan blijkt dat de meergenoemde aanvulling van P_1, P_2, resp.

Q_4 tot volle matrices zeker mogelijk is indien geldt:

a) $\det P_1 = \det Q_4$, b) γ'' is de laatste kolom van R_4^{-1}.

7. Voorlopige benadering van A. Laten $p^{(1)},\dots,p^{(r-1)}$ de kolommen van $\tilde{P}_1$ en $q_{(r+1)},\dots,q_{(n-1)}$ de rijen van $\tilde{Q}_4$ zijn (zie punt 4). Zij γ'' bepaald door de eis b) in punt 6. We bepalen nu, als $b^{(r)}$ de laatste kolom van A_1^{-1} is, een kolomvector γ' zó dat de componenten van de vector

$$(8) \qquad \gamma' + A_1^{-1}A_2\gamma'' - N\, b^{(r)}$$

in absolute waarde $\leq \frac{1}{2}$ zijn. Uit de eigenschap 1^o en de vorm van (8) leidt men af dat de matrix met kolommen

$$(9) \qquad A_1p^{(1)},\dots,A_1p^{(r-1)},\ A_1\gamma' + A_2\gamma''$$

van de vorm $N(I_r+D)$ is, waarbij $D=O(N^{-1+\varepsilon})$.

We geven verder de rijen van A_4 aan met $a_{(i)}$ $(i=r+1,\dots,n)$ en beschouwen de matrix met rijen

$$(10) \qquad q_{(r+1)},\dots,q_{(n-1)},\ M(1+\eta)a_{(n)},$$

waarbij $|\eta|$ klein is. Wegens de eigenschap 3^o ontstaat bij navermenigvuldiging van deze matrix met A_4^{-1} een matrix van de vorm $M(I_s+E_1)$. We kiezen η zó dat $\det(I_s+E_1)=\det(I_r+D)$. Dan is zeker $E_1= O(\max(N^{-1+\varepsilon},M^{-1+\varepsilon}))$.

Het is voldoende de stelling te bewijzen voor de matrix die uit A ontstaat door vóórvermenigvuldiging met $\begin{pmatrix}(I_r+D)^{-1} & 0\\ 0 & I_s+E_1\end{pmatrix}$. De laatste matrix heeft, door onze keuze van η, determinant 1, zodat voor de nieuwe matrix de relatie

$$N^rM^{-s} = \alpha\beta$$

uit punt 4 bewaard blijft. We mogen dus zonder beperking aannemen dat de matrix opgebouwd uit de kolommen (9) de gedaante NI_r heeft en dat $q_{(r+1)},\dots,q_{(n-1)}$ de eerste s-1 kolommen van MA_4 zijn.

8. Enige relaties. We voeren de volgende rijvectoren in:

α' : laatste rij van A_1

α'' : laatste rij van A_2

$\mathfrak{p} = N^{-1}M^s\beta\,\alpha'$

$\mathfrak{z} = M\,a_{(n)} - N^{-1}M^s\beta\,\alpha''$.

Verder voeren we in de getallen

$$\theta = \alpha'\gamma'' \quad , \qquad k = M^s\beta(1-N^{-1}\theta).$$

We beschouwen nu de matrix $Y=A_4P_2$. Wegens de keuze van γ'' in punt 6 is $R_4\gamma''$ de s-de eenheidsvector. Uit het feit dat MA_4 determinant $M^s\beta$ en s-1 rijen $q_{(i)}$ heeft en uit de decompositie van $\tilde{Q}_4$ in punt 5 leidt men af dat de matrix Y slechts één element $\neq 0$ heeft, en wel op de plaats (n,r) een element $y_{nr} = M^{s-1}\beta$.

Een gevolg van dit laatste is dat de matrix $M(A_4-N^{-1}YA_2)$ (zie het linkerlid van (5), met D=0) ontstaat uit MA_4 door de laatste rij te vervangen door $\bar{\zeta}$. Men kan gemakkelijk de determinant van deze matrix berekenen. Men vindt na enige berekeningen de volgende relaties:

$$(11) \qquad \det(p^{(1)},\ldots,p^{(r-1)},\gamma') = \det M(A_4-N^{-1}YA_2) = \bar{\zeta}\gamma''=k.$$

Uit deze relatie volgt nog dat k een geheel getal is.

Vervolgens kan men aantonen dat $\mathfrak{p}$ een primitieve gehele vector is. Dit gaat als volgt. Kies een of andere gehele kolomvector $\bar{\gamma}$, zodanig dat de matrix $\bar{P}_1$ met kolommen $p^{(1)},\ldots,p^{(r-1)},\bar{\gamma}$ determinant 1 heeft. Dan is det $A_1\bar{P}_1 = \alpha$. Verder is $A_1\bar{P}_1$ een boven-driehoeksmatrix met in de hoofddiagonaal elementen $N,\ldots,N$, $\alpha'\bar{\gamma}$. Dus is $N^{r-1}\alpha'\bar{\gamma}=\alpha$, ofwel $\mathfrak{p}\bar{\gamma}= N^{-1}M^s\beta\alpha'\bar{\gamma} = N^{-r}M^s\alpha\beta =1$, en ook $\mathfrak{p}\, p^{(j)}=\alpha' p^{(j)}=0$ $(j=1,\ldots,r-1)$. Dus is $\mathfrak{p}\ \bar{P}_1$ een eenheidsvector. Daaruit volgt de bewering.

9. <u>Een moeilijkheid.</u> We gaan nu beginnen met de bepaling van de laatste rij van P_1 en de laatste rij van Q_4. Wegens de speciale vorm van P_2 worden de kolommen van $A_1P_1+A_2P_2$ gegeven door de vectoren (9); wegens punt 7 is dus $A_1P_1+A_2P_2=NI_r$. Verder hebben we al opgemerkt dat de rijen van $M(A_4-N^{-1}YA_2)$ gegeven worden door $Ma_{(i)}=q_{(i)}$ $(i=r+1,\ldots,n-1)$, $\bar{\zeta}$. Dus aan de relaties (4) en (5) is al voldaan (voor de enigszins veranderde matrix A), met D=E=0, afgezien van de laatste rij van Q_4. Wat we nog moeten doen, is de rij $\bar{\zeta}$ benaderen door een gehele rijvector $q_{(n)}$. We mogen echter de eis a) in punt 6 niet veronachtzamen. Deze eis houdt in dat we in de s-dimensionale ruimte van mogelijke vectoren $\bar{\zeta}$ een vector $q_{(n)}$ moeten kiezen in een gegeven rationaal hypervlak. En wel moet $q_{(n)}$ geheel zijn en een benadering zijn van $\bar{\zeta}$. Helaas liggen de roosterpunten in het genoemde hypervlak dun gezaaid (ze vormen een (s-1)-dimensionaal rooster met grote determinant).

10. <u>Invoering van de matrix U.</u> We gaan A navermenigvuldigen met een matrix $\begin{pmatrix} I_r & U \\ O & I_s \end{pmatrix}$, waarbij U een nader te bepalen gehele $r \times s$-matrix is. Dit heeft het effect dat A_2 wordt vervangen door $A_2^* = A_2 + A_1 U$. Dan blijft de relatie $A_1P_1 + A_2P_2 = NI_r$ gelden als we in P_1 slechts de laatste kolom $\mathfrak{y}'$ vervangen door $\mathfrak{y}^* = \mathfrak{y}' - U\mathfrak{y}''$; R_4 en P_2 veranderen niet. Verder wordt $\mathfrak{a}''$ vervangen door $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}'' + \mathfrak{a}'U$ en $\bar{\mathfrak{z}}$ door

$$(12) \qquad \mathfrak{z} = M\, a_{(n)} - N^{-1}M^s \beta\, \mathfrak{a}^* = \bar{\mathfrak{z}} - \mathfrak{p}\, U.$$

De berekeningen uit punt 8 blijven doorgaan. In het bijzonder heeft men

$$(13) \qquad \det(p^{(1)}, \ldots, p^{(r-1)}, \mathfrak{y}^*) = \det M(A_4 - N^{-1}YA_2^*) = \mathfrak{z}\mathfrak{y}'' = k - \mathfrak{p}\, U\mathfrak{y}''.$$

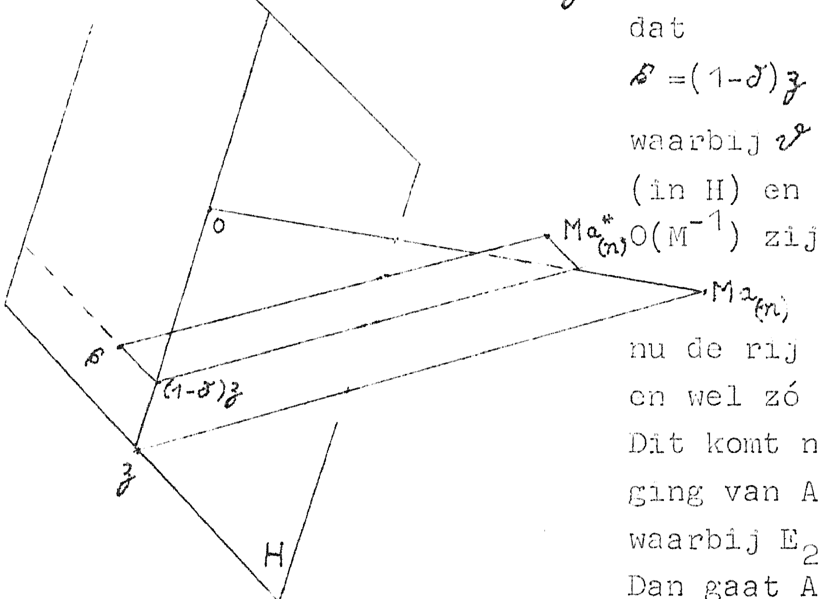
Merk op dat $\mathfrak{y}^*$ geheel is. Merk verder op dat k een geheel getal is, wegens (11), en dat $\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{y}''$ primitieve gehele vectoren zijn.

11. <u>Het rooster $\bar{\Lambda}$.</u> Uit het laatste volgt dat we U zo kunnen bepalen dat $\mathfrak{z}\mathfrak{y}'' = k - \mathfrak{p}\, U\mathfrak{y}'' = 0$ is. Voor al zulke U doorloopt $\mathfrak{z}$ een zeker (inhomogeen) (s-1)-dimensionaal rooster $\bar{\Lambda}$ in het hypervlak $\mathfrak{z}\mathfrak{y}''=0$, stel H. De determinant van dit rooster is vrij groot. Zij Λ het bijbehorende homogene rooster in H.

12. <u>Eind van het bewijs.</u> Door een geschikte toepassing van de stelling van Minkowski kunnen we een punt $\mathfrak{z} \in \bar{\Lambda}$ en een punt $\mathfrak{b} \in \Lambda$ vinden, zodanig dat

$$\mathfrak{b} = (1-\delta)\mathfrak{z} + M\vartheta,$$

waarbij ϑ loodrecht op $\mathfrak{z}$ staat (in H) en δ en ϑ van de orde $O(M^{-1})$ zijn.



In de matrix A_4 gaan we nu de rij $a_{(n)}$ vervangen door $a^*_{(n)}$, en wel zó dat $M\, a^*_{(n)} = (1-\delta)Ma_{(n)} + M\vartheta$. Dit komt neer op vóórvermenigvuldiging van A_4 met een matrix $I_s + E_2$, waarbij $E_2 = O(\max(N^{-1+\varepsilon}, M^{-1+\frac{s}{\varepsilon}}))$. Dan gaat A_4 over in A_4^* en $M(A_4 - N^{-1}YA_2^*)$ in $M(A_4^* - N^{-1}A_4^*P_2A_2^*)$ met s-1 rijen $q_{(i)}$ en één rij (let op $\vartheta\mathfrak{y}''=0$ en $Ma_{(n)}\mathfrak{y}'' = M^s\beta$).

$$\begin{aligned} M\, a^*_{(n)} - N^{-1}M\, a^*_{(n)}P_2A_2^* &= (1-\delta)M\, a_{(n)} + M\vartheta - N^{-1}(1-\delta)M\, a_{(n)}P_2A_2^* \\ &= M\vartheta + (1-\delta)(M\, a_{(n)} - N^{-1}M^s\beta\, \mathfrak{a}^*) \\ &= M\vartheta + (1-\delta)\mathfrak{z} = \mathfrak{b}. \end{aligned}$$

Nemen we de genoemde matrix als Q_4 en $(p^{(1)},\dots,p^{(r-1)},\mathfrak{z}^*)$ als P_1, dan gelden de betrekkingen (4) en (5), met D=E=0 en A_2, A_4 vervangen door A_2^*, resp. A_4^*. Wegens (13) en $\mathfrak{z} \in H$ is det $P_1=0$ en det $M(A_4-N^{-1}YA_2^*)=0$. Dus is ook det $Q_4=0$. Dus is det P_1=det Q_4, zodat voldaan is aan de voorwaarden in punt 6 (het is niet verboden dat de determinanten in a) gelijk aan 0 zijn). Daarmee is de stelling bewezen.

Bij de toepassing van de bovenstaande stelling gaat het om stelsels van homogene lineaire vormen en om zekere typen van sterlichamen. Met een afstandsfunctie $F(x)=F(x_1,\dots,x_n)$ van een begrensd sterlichaam in R_n bedoelen we een functie $F(x)$ die voldoet aan de eisen

$$\begin{cases} F(x) \geq 0 \text{ en continu} \\ F(x) = 0 \text{ alleen als } x=o \\ F(tx)=|t|\, F(x) \text{ voor alle reële } t; \end{cases}$$

de punten $x \in R_n$ met $F(x) \leq 1$ vormen een begrensd sterlichaam. We beschouwen nu een afstandsfunctie $\emptyset(x')=\emptyset(x_1,\dots,x_r)$ van dit type, in r variabelen, en evenzo een afstandsfunctie $\psi(x'')=\psi(x_{r+1},\dots,x_n)$, in s variabelen. Dan wordt door

$$\{\emptyset(x')\}^r \cdot \{\psi(x'')\}^s \leq 1$$

een zeker (niet begrensd) sterlichaam $K_{\emptyset,\psi}$ in R_n gegeven.
Er zijn roosters Λ die geen punt $\neq o$ in het inwendige van $K=K_{\emptyset,\psi}$ hebben. De onderste grens van de determinant $d(\Lambda)$, genomen over de roosters Λ met deze eigenschap, heet de determinant $\Delta(K_{\emptyset,\psi})$ van $K_{\emptyset,\psi}$.

Hiernaast beschouwen we stelsels van lineaire vormen

$$(14)\quad \begin{cases} L_1(u) = u_1 + \vartheta_{1,r+1}\, u_{r+1} + \dots + \vartheta_{1,n}\, u_n \\ L_2(u) = u_2 + \vartheta_{2,r+1}\, u_{r+1} + \dots + \vartheta_{2,n}\, u_n \\ \text{-------------------} \\ L_r(u) = u_r + \vartheta_{r,r+1}\, u_{r+1} + \dots + \vartheta_{r,n}\, u_n \\ L_{r+1}(u) = u_{r+1} \\ \text{-------------------} \\ L_n(u) = u_n \end{cases}.$$

Zij Θ de matrix der getallen $\vartheta_{i,j}$ $(i=1,\dots,r;\ j=r+1,\dots,n)$. We interesseren ons voor roosterpunten u waarvoor de vormen $L_1(u),\dots,L_r(u)$ klein zijn in absolute waarde. Dan moeten $u_{r+1},\dots,u_n$ groot zijn. Preciezer gezegd, interesseren we ons voor de grootheid

$$C(\emptyset,\psi,\Theta) = \liminf_{\psi(u'')\to\infty} \emptyset(L_1(u),\dots,L_r(u))^r \cdot \psi(u'')^s .$$

We nemen nog de bovenste grens over :

(15) $$C(\emptyset,\psi) = \sup_{\Theta} C(\emptyset,\psi,\Theta).$$

De behandelde stelling maakt het mogelijk om een willekeurig rooster, met basis A, te vervangen door een rooster met basis $A' = \begin{pmatrix} NI_r & N\Theta \\ 0 & M^{-1}I_s \end{pmatrix}$, zodanig dat voor de punten x van dit rooster met $\psi(x'')$ groot en $\emptyset(x')^r\,\psi(x'')^s$ begrensd, de waarde van $\emptyset(x')$ niet veel verandert. Dit speelt een belangrijke rol bij het bewijs van de volgende betrekking:

(16) $$C(\emptyset,\psi) = \Delta(K_{\emptyset,\psi})^{-1}.$$

Het bewijs van (16) in de gevallen r=1 en s=1 vormt het hoofdresultaat in Davenport [1].

Naast de vormen (14) kunnen we ook beschouwen een stelsel

$$\begin{cases} M_1(u) = u_1 \qquad\qquad + \eta_{1,s+1}\,u_{s+1} + \dots + \eta_{1,n}u_n \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -} \\ M_s(u) = \qquad u_s + \eta_{s,s+1}\,u_{s+1} + \dots + \quad {}_{s,n}u_n \\ M_{s+1}(u) = \qquad u_{s+1} \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -} \\ M_n(u) = \qquad\qquad\qquad u_n \end{cases}$$

en invoeren

$$C(\psi,\emptyset) = \sup_{H} C(\psi,\emptyset,H),\quad C(\psi,\emptyset,H) = \liminf_{\emptyset(u'')\to\infty} \psi(M_1(u),\dots,M_s(u))^s\cdot\emptyset(u'')^r,$$

waarbij nu $u''=(u_{s+1},\dots,u_n)$. Een gevolg van (16) is dat de twee constanten $C(\emptyset,\psi)$, $C(\psi,\emptyset)$ gelijk zijn.

[1] H. Davenport, On a theorem of Furtwängler, Journal London Math. Soc. 30, 186-195 (1955).