STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1966 - 009

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof. Dr. C. Visser.

23 februari 1966

Reeksontwikkelingen

1. Formule van Taylor.

Is I een open interval en f(x) een daarop (n + 1) maal differentieerbare funktie, dan geldt

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R;$$

hierbij behoren a en x tot I, terwijl voor R bijvoorbeeld genomen kan worden

$$R = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$ met ζ tussen a en x (restterm van Lagrange).

Het zal blijken dat verschillende bewijsvoeringen dikwijls resttermen opleveren van uiteenlopende gedaante.
Voor het bewijs van "de" formule van Taylor hebben we de volgende drie lemma's nodig.

Lemma A. (Theorema van Rolle) Is de funktie $f(x)$ continu op het gesloten interval $[a, b]$ en differentieerbaar op het open interval (a, b) en is bovendien $f(a) = f(b) = 0$, dan ligt er tussen a en b een punt ζ met de eigenschap

$$f'(\zeta) = 0.$$

Bewijs: 1. Is $f(x) \equiv 0$ op $[a, b]$ dan is de bewering evident.

2. Is $f(x) \not\equiv 0$ op $[a, b]$, dan ligt er tussen a en b een punt ζ, zodanig dat $f(x)$ in ζ of maximaal of minimaal is. Het is duidelijk dat $f'(x)$ in dit punt gelijk is aan nul.

Lemma B. (generalisatie van lemma A) De funktie $f(x)$ zij op $[a, b]$ n maal differentieerbaar. Heeft $f(x)$ in a een n-voudig nulpunt, terwijl tevens $f(b) = 0$, dan ligt er tussen a en b een punt ζ met de eigenschap

$$f^{(n)}(\zeta) = 0.$$

Bewijs: volgens lemma A ligt er tussen a en b een punt ζ_1, zodanig dat $f'(\zeta_1) = 0$; aangezien $f'(a) = 0$, ligt er tussen a en ζ_1, een punt ζ_2 zodanig dat $f''(\zeta_2) = 0$.
Zo doorgaande vinden we tussen a en ζ_{n-2} een punt ζ_{n-1} met de eigenschap $f^{(n-1)}(\zeta_{n-1}) = 0$.
Wegens $f^{(n-1)}(a) = 0$ ligt er tenslotte tussen a en ζ_{n-1} nog een punt $\zeta_n = \zeta$ met de eigenschap $f^{(n)}(\zeta) = 0$.

Lemma C. Zijn de funkties $f(x)$ en $g(x)$ continu op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b), dan ligt er tussen a en b een punt ζ met de eigenschap

$$(f(b) - f(a)) : (g(b) - g(a)) = f'(\zeta) : g'(\zeta)$$

Bewijs: We beschouwen in het (f,g) vlak de kromme $(f(x), g(x))$.

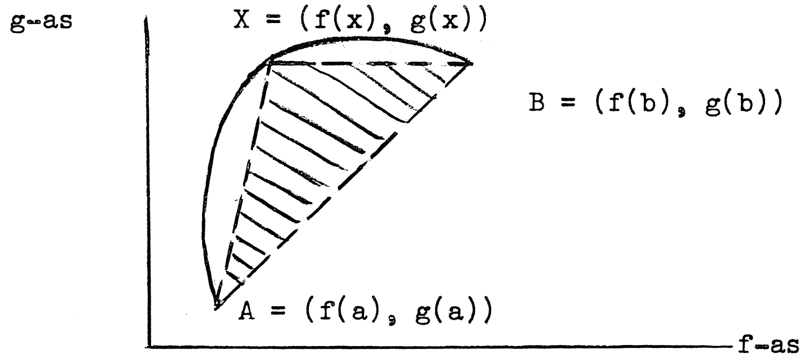

fig. 1

De oppervlakte van de in figuur 1 getekende driehoek AXB is gelijk aan

$$\Delta(x) = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} f(x) - f(a) & g(x) - g(a) \\ f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \end{vmatrix};$$

$\Delta(x)$ is continu op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b), terwijl $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$. Volgens lemma A ligt er dus tussen a en b een punt ζ zodanig dat $\Delta'(\zeta) = 0$. Hieruit volgt het gestelde.

Eerste afleiding van de formule van Taylor.

Zij nu de funktie $f(x)$ op $[a, b]$ $(n+1)$ maal differentieerbaar. Definiëren we

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

dan is a een $(n+1)$-voudig nulpunt van de funktie $f(x) - P(x)$; ook

$\phi(x) = f(x) - P(x) - c.\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ (c een constante) heeft in a een $(n+1)$-voudig nulpunt.

Kiezen we c zodanig dat $\phi(b) = 0$ (dit kan) dan ligt er volgens lemma B tussen a en b een punt ζ zodanig dat

$$\phi^{(n+1)}(\zeta) = 0,$$

met als gevolg $\quad c = f^{(n+1)}(\zeta)$

en $f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$.

Het zal zonder meer duidelijk zijn dat we nu voor elke x uit het interval $[a, b]$ mogen schrijven

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

met ζ tussen a en x.

Tweede afleiding van de formule van Taylor.

Onderstel dat $f(x)$ op $[a, b]$ $(n+1)$ maal differentieerbaar is met continue $(n+1)^{e}$ afgeleide.

Dan geldt volgens de hoofdstelling der integraalrekening

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x_1)\,dx_1 =$$

$$= f(a) + \int_a^b dx_1 \left\{ f'(a) + \int_a^{x_1} f''(x_2)\,dx_2 \right\} = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) +$$

$$+ \int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} f''(x_2)\,dx_2 = \ldots\ldots\ldots =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n +$$

$$+ \int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 \int_a^{x_3} \ldots\ldots \int_a^{x_n} f^{(n+1)}(x_{n+1})\,dx_{n+1}.$$

Door verandering van de volgorde der integraties leidt men hieruit de gebruikelijke integraalvorm voor de restterm af.

Derde afleiding van de formule van Taylor.

Onderstel dat $f(x)$ en $g(x)$ op $[a, b]$ $(n+1)$ maal differentieerbaar zijn, en definieer:

$$\phi(x, a) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right\}$$

en $\psi(x, a) = g(x) - \{g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\}$;

dan is $$\frac{\partial\,\phi(x, a)}{\partial a} = -\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

en $$\frac{\partial\,\psi(x, a)}{\partial a} = -\frac{g^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Beschouwen we $\phi(x, a)$ en $\psi(x, a)$ als funkties van a, dan kunnen we volgens lemma C schrijven

$$\{\phi(x, a) - \phi(x, x)\} \left.\frac{\partial\,\psi(x, a)}{\partial a}\right]_\zeta = \{\psi(x, a) - \psi(x, x)\} \left.\frac{\partial\,\phi(x, a)}{\partial a}\right]_\zeta$$

met ζ tussen a en x.

Een eenvoudige berekening leert dat dan

$$\left[f(x) - \{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n\}\right] : f^{(n+1)}(\zeta) =$$

$$= \left[g(x) - \{g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\}\right] : g^{(n+1)}(\zeta).$$

Dit is een zeer algemene gedaante van de formule van Taylor.

Om een eenvoudige restterm te verkrijgen, kan men kiezen $g(x) = (x-a)^{n+1}$.

2. De irrationaliteit van π.

Men kan rechtstreeks verifiëren dat de funktie $\frac{x^n}{n!}\sin x$ de afgeleide is van

$$-\frac{x^n}{n!}\cos x + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sin x + -- + + \ldots\ldots \pm \begin{cases}\sin x\\ \cos x\end{cases}$$

en dat $\frac{x^n}{n!}\cos x$ de afgeleide is van

$$\frac{x^n}{n!}\sin x + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cos x -- + + \ldots\ldots \pm \begin{cases}\sin x\\ \cos x\end{cases}$$

Door dit integratie proces voort te zetten, vinden we dat

$x^n \sin x$ de $(n+1)^{\underline{e}}$ afgeleide is van een funktie $\Phi(x)$ van de gedaante

$$\Phi(x) = P(x)\cos x + Q(x)\sin x$$

waarbij $P(x)$ en $Q(x)$ $n^{\underline{e}}$ graadspolynomen zijn met <u>gehele</u> coëfficienten.
Nu is

$$\Phi(\pi) = \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1!}\pi + \ldots + \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\pi^n + \frac{\Phi^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\pi^{n+1}$$

$$= \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1!}\pi + \ldots + \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\pi^n + \frac{\zeta^n \sin\zeta}{(n+1)!}\pi^{n+1}$$

met $0 < \zeta < \pi$.

Onderstel nu dat π rationaal is; we kunnen dan schrijven $\pi = \frac{p}{q}$ (p en q geheel en > 0), met als gevolg

$$\Phi\left(\frac{p}{q}\right) = \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1!}\cdot\frac{p}{q} + \ldots + \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{p}{q}\right)^n + \frac{\zeta^n \sin\zeta}{(n+1)!}\left(\frac{p}{q}\right)^{n+1}$$

of $$q^n\,\Phi\left(\frac{p}{q}\right) = q^n\left\{\Phi(0) + \ldots + \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{p}{q}\right)^n\right\} + \frac{\zeta^n \sin\zeta}{(n+1)!}\,\frac{p^{n+1}}{q}.$$

Omdat $P(x)$ een $n^{\underline{e}}$ graadspolynoom is met gehele coëfficienten, is $q^n\Phi(\frac{p}{q})$ geheel; verder is het eenvoudig in te zien dat $\frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!}$ voor $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ geheel is, zodat

$$\frac{\zeta^n \sin\zeta}{(n+1)!}\cdot\frac{p^{n+1}}{q}$$

ook geheel moet zijn.
Maar

$$0 < \frac{\zeta^n \sin\zeta}{(n+1)!}\cdot\frac{p^{n+1}}{q} \leq \frac{(p\pi)^n\cdot\pi}{(n+1)!} < 1$$

als n maar voldoende groot gekozen wordt.

Op grond van deze tegenspraak concluderen we dat π irrationaal is.