STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1952 - 010

Voordracht in de serie Actualiteiten

B.J. Loopstra

19 april 1952

LOGISCHE SYNTHESE VAN REKENCIRCUITS

1952

Voordracht door B.J. Loopstra in de serie

Actualiteiten op 19 April 1952.

LOGISCHE SYNTHESE VAN REKENCIRCUITS

Het probleem, hoe men met behulp van een beperkt aantal types schakelelementen zoals bijv. relais, pentodes en triodes, betrekkelijk gecompliceerde schakel- of arithmetische operaties kan verrichten is in het algemeen met enige scherpzinnigheid wel op te lossen. De vraag echter of met de gevonden oplossing ook de minimaal-oplossing is gevonden, d.w.z. die oplossing, welke het kleinste aantal schakelelementen bevat, is bij de huidige stand van kennis op dit gebied, slechts zelden met zekerheid te beantwoorden.

Bij de verder te stellen vraag welke eventueel hypothetische schakelelementen zich het beste zouden lenen om bepaalde klassen van problemen op te lossen, tast men vrijwel geheel in het duister.

We zullen ons er dan ook toe bepalen na te gaan wat er met betrekking tot het vinden van minimaal oplossingen met gegeven elementen vooral door Aiken en zijn groep in Harvard is gedaan en aan de hand hiervan laten zien, welke desiderata er op dit gebied nog zoal zijn.

We zullen ons beperken tot binaire variabelen, d.w.z. variabelen welke slechts twee discrete waarden kunnen aannemen. Deze twee waarden zullen we voor elke variabele aangeven als 0 en 1. De variabelen zelf noemen we x, y, z... en we zetten

$$x' = 1 - x.$$

Uit deze beperkingen volgt dat bij een probleem met n onafhankelijk veranderlijken, in den vervolge technisch aangeduid als "ingangen" er een eindig aantal, nl. 2^n verschillende ingangswaarden mogelijk zijn.

Evenzo zijn er bij m afhankelijke variabelen of uitgangen 2^m verschillende uitgangswaarden mogelijk. Hierbij dient echter wel te worden opgemerkt, dat dit aantal niet altijd bereikt hoeft te worden. Het is bijv. al dadelijk in te zien, dat het aantal verschillende uitgangswaarden nooit groter kan zijn dan het aantal verschillende ingangswaarden en deze situatie doet zich o.a. voor bij het later te bespreken probleem der decodatie, waar geldt dat $m = 2^n$. Men kan dus een schakeling, waarbij de variabelen aan deze beperkingen voldoen, opvatten als een operator, welke aan 2^m binaire getallen 2^n

andere getallen toevoegt, waarvan er ten hoogste 2^m verschillend zijn.

Tenslotte rest ons nog beperkingen op te stellen ten aanzien van de te gebruiken schakelelementen.

Voorlopig zullen we ons houden aan de volgende:

$$T_n(x_i) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$$

$$C_n(x_i) = 1 - T_n(x_i)$$

$$P_2(x_1, x_2) = 1 - x_1\ x_2.$$

De letters T, C en P staan hier respectievelijk voor triode, cathode-volger en pentode. Dit is echter voor de volgende theoretische beschouwingen van geen enkel belang.

In de eerste plaats zullen we nu beschouwen het geval m = 1, één uitgang aan het circuit dus.

In dit geval kan de werking van de schakeling dus worden gespecificeerd door aan te geven voor welke combinaties der ingangen de uitgang 1 zal zijn. We krijgen dan een lijstje, bijv. voor n = 2:

x_1	x_2	Uitgang
0	0	$0 = f_0$
0	1	$1 = f_1$
1	0	$1 = f_2$
1	1	$0 = f_3$

Uit dit lijstje is gemakkelijk een formule voor de uitgang $f(x_1\ x_2)$ te vinden. Blijkbaar geldt immers:

$$f(x_1\ x_2) = x_1'\ x_2'\ f_0 + x_1'\ x_2\ f_1 + x_1\ x_2'\ f_2 + x_1\ x_2\ f_3$$

in ons geval dus $x_1'\ x_2 + x_1\ x_2'$.

Stelt men algemeen:

$$p_0^n = x_1'\ x_2' \ldots x_n'$$

$$p_1^n = x_1'\ x_2' \ldots x_n$$

$$\vdots$$

$$p_{\nu-1}^n = x_1\ x_2 \ldots x_n \qquad (\nu = 2^n)$$

Dan is $f(x) = \sum_{i=0}^{\nu-1} p_i^n\ f_i$ de canonische vorm, waarop iedere functie van n ingangsvariabelen kan worden gebracht.

Het is duidelijk dat de $f_0 \ldots f_3$ van ons voorbeeld op 16 verschillende wijze kunnen worden gekozen en in het algemeen geldt, dat voor n ingangsvariabelen dit aantal "schakelfuncties" $N = 2^{2^n} = 2^{\nu}$ bedraagt.

Wij hoeven echter niet al deze N schakelfuncties in onze beschouwingen te betrekken.

Permutatie der ingangsvariabelen is technisch gezien gewoonlijk een kwestie van het verwisselen van draadjes en de aanname, dat x_i en x_i' beide beschikbaar zijn is zeer vaak geoorloofd en zullen we daarom maken, zodat we bij een functie reeds $n!2^n$ mogelijkheden hebben om de variabelen te ordenen. Nu zullen deze over het algemeen geen aanleiding geven tot $n!2^n$ verschillende uitgangsfuncties in verband met b.v. symmetrie-eigenschappen van de oorspronkelijke functie, maar we vinden dus uit de ene functie een aantal schakelfuncties van de 2^{ν}, welke er zijn. Van belang is natuurlijk in hoofdzaak de verzameling der σ_n functies, waaruit door het toepassen van de $n!2^n$ transformaties alle 2^{ν} mogelijke functies zijn af te leiden. Een betere methode om deze σ_n functies te vinden dan ze te laten uitzoeken door een rekenmachine en een betere weg om het getal σ_n te bepalen dan het afwachten van het resultaat der machine is op het ogenblik helaas niet beschikbaar. Bekend is tot dusverre slechts $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 22$, $\sigma_4 = 402$.

Dat deze σ_n functies in deze zin onafhankelijk zijn, wil nog niet zeggen, dat ook de physische circuits waarmee deze functies te realiseren zijn, alle verschillend moeten zijn.

Voorbeeld: (voor n = 3)

$$x'yz + xy'z' + xyz \quad \text{en} \quad x'yz + xy'z + xyz' + xyz$$

welke resp. geschreven kunnen worden als

$$P_2(y',z) . P_2(y,z') . P_2(x',y')$$

en

$$P_2(y',z') . P_2(x',y') . P_2(x',z') .$$

Beide functies kunnen dus met dezelfde schakeling van 3 pentodes gerealiseerd worden.

We zullen nu na moeten gaan hoe we met binaire functies in het algemeen kunnen rekenen om te vinden hoe gegeven functies uit binaire standaardfuncties zouden kunnen worden opgebouwd.

Hierbij moeten we bedenken, dat we met binaire grootheden alleen die manipulaties mogen uitvoeren, welke als resultaat weer een binaire grootheid opleveren. Hieruit volgt, dat voor ons som en verschil van 2 binaire grootheden geen betekenis zullen hebben, tenzij in een formule als $\sum_{i=0}^{\nu-1} p_i^n f_i$, welke in het voorgaande werd afgeleid en waarbij uit de gedaante der p_i^n volgt, dat ten hoogste een der termen van nul verschillend kan zijn.

Ook aftrekken van de constante 1 is een uitzondering op deze regel. Producten hebben steeds betekenis, aangezien het product van 2 binaire grootheden steeds binair is. Aan quotienten valt uiteraard geen betekenis toe te kennen, terwijl het verheffen van een binaire grootheid tot een macht welke voor iedere waarde combinatie der variabelen in de exponent een natuurlijk getal of nul is, natuurlijk toegelaten kan worden. In dit laatste geval echter kunnen we dit natuurlijke getal steeds door 1 vervangen, aangezien k^n voor k binair en n natuurlijk getal steeds gelijk is aan k.

We zien dus dat onze pogingen er op gericht zullen moeten zijn de gegeven functies te schrijven in de vorm van producten van de standaardfuncties.

Beschouwen we nu het geval n = 3. We schrijven de gegeven functie f(x,y,z) in de volgende vorm:

$$f(x,y,z)= (1-axy)(1-bxz)(1-cyz)(1-dx'y)(1-ex'z)(1-fy'z)(1-gxy')\times$$
$$\times(1-hxz')(1-iyz')(1-jx'y')(1-kx'z')(1-ly'z')(1-Axyz)(1-Bxyz')\times$$
$$\times(1-Cxy'z)(1-Dxy'z')(1-Ex'yz)(1-Fx'yz')(1-Fx'yz')(1-Gx'y'z)\times$$
$$\times(1-Hx'y'z')$$

De gang van zaken is nu deze, dat we met behulp van het "lijstje" voor de functie f de in deze vergelijking voorkomende constanten bepalen.

Aangezien we voor n = 3 slechts 8 vergelijkingen vinden voor de constanten, gaat het er om een stel waarden voor a...H te vinden, zodat aan alle vergelijkingen voldaan wordt. Hierbij zullen we om te beginnen al die coefficienten, welke onbepaald kunnen blijven = 0 stellen, aangezien de keuze 1 voor deze coefficienten uitsluitend tot gevolg zou hebben, dat nutteloos materiaal voor de verwezenlijking van de functie zou worden gebruikt.

Als verschillende keuzen van coefficienten combinaties aan de betrekkingen kunnen voldoen, zullen we die kiezen, bij welke het kleinste aantal variabelen optreedt, d.w.z. waarvoor

$$2(a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l) + 3(A+B+C+D+E+F+G+H)$$

minimaal is.

Deze vorm, waarin de functie daarna verschijnt, noemt Aiken de minimaal vorm. Het kan natuurlijk voorkomen, dat er meer dan een minimaal-vorm mogelijk is.

Het plezierige van deze vorm is nu dat de "ontbinding" van de functie in T, P en C factoren nu onmiddellijk kan worden opgeschreven, immers een factor van de vorm (1-xy) kan worden geschreven als $P_2(x,y)$, terwijl een term (1-xyz) kan worden vervangen door $T_1(\varphi), \varphi = T_3(x',y',z')$.

Het onplezierige is echter, dat de aldus verkregen vorm meestal slechts dan aanleiding geeft tot een minimaal-schakeling als alle hoofdletterfactoren = 0 zijn. Is dit niet het geval, dan is het dikwijls mogelijk door verder aan de formule te scharrelen, een goedkoper resultaat te krijgen. Algemene regels voor deze verdergaande simplificaties zijn niet te geven en hoewel met de hier uitgestippelde methode, welke voor practische doeleinden nog aanzienlijk vereenvoudigd kan worden, nuttige resultaten bereikt kunnen worden, ontberen we toch nog steeds de geruststellende zekerheid, dat we niet meer dure radiobuizen gebruikt hebben dan strikt noodzakelijk is.

Een ander, en nog klemmender bezwaar tegen de methode is, dat haar toepassing vrijwel geheel faalt wanneer men probeert haar toe te passen op meer gecompliceerde schakelelementen.

Een element, dat in plaats van door de eenvoudige T, C of P functies bijvoorbeeld gekenmerkt zou worden door de functie:

$$f = x(yz + y'w)$$

dus $f = T_1(x')\, P_2(y,z')P_2(y',w')$

zou in het hierboven geschetste schema nauwelijks passen, omdat het niet zo heel duidelijk is in welke vorm met onbepaalde coëfficienten men de gegeven functie zou moeten schrijven om een ontbinding in deze vormen te krijgen.

Nog minder bruikbaar is de methode wanneer elementen met 2 uitgangen hun intrede zouden doen, hoewel dergelijke elementen zeer wel realiseerbaar en waarschijnlijk voor binaire schakeltechniek van eminent belang zouden zijn. Eén van de moeilijkheden is echter, zoals in het begin reeds werd opgemerkt, dat we momenteel niet in staat zijn welgefundeerde suggesties te doen omtrent de meest wenselijke vorm van de functie van een te construeren primair schakelelement met bijv. 3 ingangen en 2 uitgangen, omdat de theorie ons op dit punt volkomen in de steek laat.

Ongeveer even onbevredigend is de situatie met betrekking tot die gevallen, waarin $m \neq 1$. Het beste wat men hier in het algemeen kan doen, is nagaan of de functies van elk der uitgangen afzonderlijk soms overeeenkomstige factoren bevatten, waardoor een bepaalde hoeveelheid materiaal voor verschillende uitgangen dienst kan doen.

Ook komt het nogal eens voor, dat de functies, welke de verschillende uitgangen afzonderlijk beschrijven, onderling een eenvoudig functioneel verband vertonen, waarvan men profijt kan trekken.

We zullen nu enkele eenvoudige circuits met $m \neq 1$ bespreken en wel in de eerste plaats het probleem der volledige of gedeeltelijke "decodatie" behandelen. Onder een decodator verstaan we daarbij een schakeling, waarvoor $n = p$ en $m = 2^p$ en welke zodanig is geconstrueerd, dat voor elk der 2^p mogelijke waardecombinaties der ingangen slechts 1 der uitgangen 1 is (voor verschillende ingangscombinaties verschillende uitgangen).

Vat men de p ingangen in de een of andere volgorde op als een binair geschreven natuurlijk getal, dan kan men dus bijvoorbeeld zeggen, dat als de ingang het getal k voorstelt, alleen de k^{de} uitgang = 1 is. De uitgangen hebben dus de functies:

$$f_0 = x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_p$$

$$f_1 = x_1' \, x_2 \, \ldots \, x_p$$

$$f_2 = x_1 \, x_2' \, \ldots \, x_p$$

$$\vdots$$

$$f_\nu = x_1' \, x_2' \, \ldots \, x_p' \qquad \nu = 2^p - 1$$

Nemen we nu als voorbeeld bijv. $p = 4$, dan zien we dat

$$T_2 \left[C_2(x,y),\ C_2(z,w) \right] = x'y'z'w'.$$

Een T_2 circuit kan dus een der gewenste uitgangen leveren mits de C_2's gegeven zijn.

Dit betekent, dat we om alle uitgangen te vinden eerste alle C_2 circuits moeten maken. Dit zijn er in ons geval 8, nl.

$$C_2(xy) \quad C_2(x'y) \quad C_2(x\,y') \quad C_2(x'y')$$

$$C_2(z\,w) \quad C_2(z'w) \quad C_2(z\,w') \quad C_2(z'w').$$

De totale schakeling bevat dus 8 C_2 circuits + 16 T_2's.

In het algemeen is voor de hoeveelheid materiaal, welke een schakeling gebruikt, de som der indices van de er in voorkomende T,C en P symbolen maatgevend: dit betekent technisch gezien nl. het aantal gebruikte roosters en is meestal aequivalent aan het dubbele van het aantal gebruikte radiobuizen. In dit geval kunnen we dus de kosten van de schakeling stellen op $8 \times 2 + 16 \times 2 = 48$ totaal of 3 per uitgang.

De hier geschetste schakeling noemt men veelal een rechthoek wegens het uiterlijk dat hij aanneemt, als men hem in schemavorm op papier zet.

Het algemene voorschrift voor n ingangsvariabelen (n even verondersteld) luidt:

Verdeel de ingangsvariabelen in 2 gelijke groepen en decodeer deze volgens het geschetste systeem. Combineer vervolgens iedere uitgang van de ene groep met een van de andere groep met behulp van een T_2 circuit. Nadere beschouwing leert direct, dat de kosten per uitgang met toenemende n naderen tot 2 ($n = 4 \longrightarrow 3$

$n = 5 \longrightarrow 3$

$n = 6 \longrightarrow 2.75$

$n = 7 \longrightarrow 2.56$

$n = 8 \longrightarrow 2.38$.

Voor oneven n is de symmetrie niet meer geheel te handhaven en liggen de kosten, zoals uit het tabelletje ook blijkt, relatief iets ongunstiger.

Wanneer bepaalde uitgangen niet nodig zijn, leert inspectie van het schema direct, welke onderdelen kunnen worden weggelaten. De hier gemaakte kostenberekening kan nu dienen om althans voor iedere schakeling met $m \neq 1$ een bovengrens aan te geven voor de benodigde hoeveelheid onderdelen. Daartoe bedenken we, dat wanneer iedere uitgang afzonderlijk als functie van de n ingangsvariabelen in canonische vorm wordt neergeschreven, alle daarbij optredende termen door één rechthoek voor n variabelen kunnen worden geleverd. Daarna moet voor iedere uitgang nog gecombineerd worden, hetgeen met een C functie kan geschieden. Hierbij kunnen we dan nog bedenken, dat als het aantal termen voor een bepaalde uitgang $> \nu/2$ is, het aanbeveling verdient de "complementaire" termen te combineren met behulp van een T-functie. Zodoende vinden we dat de kosten voor een dergelijk circuit maximaal bedragen: $\sum_{j=1}^{\nu} M_j + g_n$ waarin:

g_n = kosten van rechthoek voor n variabelen

$M_j = m_j$ of $\nu - m_j$ (welke de kleinste is)

m_j = aantal termen optredende in de canonische vorm der j^{-de} uitgang.

In de practijk zal het gewoonlijk niet verstandig zijn dit systeem te volgen, aangezien veelal door geschikte combinatie van onderdelen der voor de afzonderlijke uitgangen benodigde apparatuur een belangrijke kostenverlaging te bereiken zal zijn. Algemene regels hiervoor zijn echter helaas niet te geven en de vindingrijkheid en het opmerkingsvermogen van de constructeur blijven nog een (te) grote rol spelen.