STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-10

Over matrices, waarvan de Hermitische en imaginaire delen gegeven rang hebben

Dr. W. Peremans

Over matrices, waarvan de Hermitische en imaginaire delen gegeven rang hebben.

door

Dr W. Peremans

Een vierkante complexe matrix is, zoals bekend, op één en slechts één manier te schrijven als de som van een Hermitische en een scheef-Hermitische matrix; we noemen de hierbij optredende Hermitische (resp. scheef-Hermitische) matrix het Hermitische (resp. scheef-Hermitische) deel van de gegeven matrix. Bovendien is een complexe matrix op één en slechts één manier te schrijven als de som van een reële matrix en een zuiver imaginaire matrix; we noemen de hierbij optredende reële (resp. zuiver imaginaire) matrix het reële (resp. imaginaire) deel van de gegeven matrix. Ten slotte is een vierkante complexe matrix op één en slechts één manier te schrijven als de som van een symmetrische en een scheefsymmetrische matrix; we noemen de hierbij optredende symmetrische (resp. scheefsymmetrische) matrix het symmetrische (resp. scheefsymmetrische deel van de gegeven matrix.

Het doel van dit rapport is, de volgende stelling te bewijzen:

Stelling. De complexe $n \times n$ matrices Σ, waarvan het Hermitische deel rang r en het imaginaire deel rang s hebben, vormen een variëteit waarvan de dimensie d de volgende waarde heeft:

$$d = \tfrac{1}{2}n^2 + n(r+s-\tfrac{1}{2}) + rs - \tfrac{1}{2}r(r-1) - \tfrac{1}{2}s(s-1) \quad \text{als } r + s \leq n,$$
$$d = 2n(r+s) - r^2 - s^2 \quad \text{als } r + s \geq n.$$

Het bewijs valt uiteen in een aantal stappen.

We splitsen de matrix Σ eerst in reëel en imaginair deel en deze beide vervolgens weer in symmetrisch en scheefsymmetrisch deel. Dit levert de schrijfwijze $\Sigma = A+B+i(C+D)$, waarin A,B,C en D reëel, A en C symmetrisch en B en D scheefsymmetrisch zijn. Nu is $A+iD$ klaarblijkelijk het Hermitische deel van Σ en $i(C+D)$ het imaginaire deel van Σ. Geëist wordt dus dat $A+iD$ rang r en $i(C+D)$(of $C+D$) rang s heeft. In deze eisen komt B niet voor. Deze matrix kan dus als reële scheefsymmetrische matrix geheel vrij gekozen worden, hetgeen $\tfrac{1}{2}n(n-1)$ reële parameters oplevert.

We geven de getransponeerde van een matrix S aan met S', de toegevoegd complexe van S met $\bar{S}$ en een eenheidsmatrix met I.

We beginnen met een aantal, ten dele bekende, hulpstellingen.

Hulpstelling 1. Bij iedere reële scheefsymmetrische $n \times n$ matrix T bestaat een reële niet-singuliere $n \times n$ matrix P, zodat $P'TP$ een matrix is bestaande uit een aantal langs de hoofddiagonaal geregen 2×2 matri-

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ces (kastjes) van de gedaante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

en overigens uit nullen. Als u het aantal van deze kastjes is, is 2u de rang van T, die dus even is.

Bewijs: Zie Wedderburn [1] , blz.91, theorem 7; in deze stelling worden slechts orthogonale P toegelaten en slechts kastjes van de vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

met $\alpha \neq 0$ bereikt. Uit dit resultaat is onze hulpstelling echter direct af te leiden, omdat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Hulpstelling 1 kan ook bewezen worden met behulp van de bewijsmethode van hulpstelling 9.

Hulpstelling 2. Als een $n \times n$ matrix S rang k heeft, bestaan er k onafhankelijke kolommen in S, zodat elk van de overige kolommen van S een lineaire combinatie van deze k kolommen is. Als in het bijzonder de laatste k kolommen van S onafhankelijk zijn en als K de $n \times (n-k)$ matrix bestaande uit de eerst n-k kolommen van S is en L de $n \times k$ matrix bestaande uit de laatste k kolommen van S, dan is er één en slechts één $k \times (n-k)$ matrix U, zodat K=LU. Als in het bijzonder S reëel is, is U reëel.

Het bewijs volgt uit de theorie van de lineaire vergelijkingen.

Hulpstelling 3. Als een $n \times n$ matrix S rang k heeft, bestaat er een niet-singuliere $n \times n$ matrix P, zodat in P'SP de eerste n-k kolommen uitsluitend uit nullen bestaan. Als S bovendien reëel is, kan P reëel worden gekozen.

Bewijs: Door passende keuze van een permutatiematrix P_1 kan men verkrijgen dat in $P_1'SP_1$ de laatste k kolommen onafhankelijk zijn. Bepaalt men bij deze matrix U als in hulpstelling 2 en kiest men P_2 als volgt

$$P_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\quad}^{n-k} & \overbrace{\quad}^{k} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} I & 0 \\ -U & I \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \}\, n-k \\ \}\, k \end{matrix} ,$$

dan voldoet $P=P_1P_2$ klaarblijkelijk aan de vereisten.

Hulpstelling 4. Als een $n \times n$ matrix S rang k heeft, dan hebben het symmetrische en het scheefsymmetrische deel van S rangen $\leq 2k$.

Bewijs: Kies P bij S als in hulpstelling 3 en laat S_1(resp. S_2) het symmetrische (resp. scheefsymmetrische) deel van S zijn. Dan is $P'S_1P$ (resp. $P'S_2P$) het symmetrische (resp. scheefsymmetrische) deel van $P'SP$. Uit de gedaante van $P'SP$ volgt direct, dat de $(n-k)\times(n-k)$ linkerbovenhoeken van $P'S_1P$ en $P'S_2P$ uitsluitend uit nullen bestaan. Hieruit volgt dat $P'S_1P$ en $P'S_2P$ rangen $\leq 2k$ hebben en dus ook S_1 en S_2.

Uit hulpstelling 4 volgt dat het imaginaire deel van een Hermitische matrix van rang r een rang $\leq 2r$ heeft. Alle even rangen $\leq 2r$ kunnen daarbij ook werkelijk voorkomen:

Hulpstelling 5. Als $u \leq r$ en als D een reële scheefsymmetrische $n\times n$ matrix van rang 2u is, dan bestaat er een reële symmetrische $n\times n$ matrix A, zodat A+iD rang r heeft.

Bewijs: Kies bij D een P als in hulpstelling 1. Omdat

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \text{ resp.} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

rang 1, resp. rang 2 heeft, kan men makkelijk een reële symmetrische $n\times n$ matrix A_1 aangeven zodat $A_1+iP'DP$ rang r heeft. Kiest men nu $A=(P')^{-1}A_1P^{-1}$, dan heeft A+iD ook rang r en is A reëel en symmetrisch.

Iets soortgelijks kunnen we met een reële matrix van rang s doen. De rang van het scheefsymmetrische deel is $\leq 2s$; alle even rangen $\leq 2s$ kunnen optreden:

Hulpstelling 6. Als $u \leq s$ en als D een reële scheefsymmetrische $n\times n$ matrix van rang 2u is, dan bestaat er een reële symmetrische $n\times n$ matrix C, zodat C+D rang s heeft.

Bewijs: Analoog als bij hulpstelling 5, nu echter met de matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hulpstelling 7. Als T een reële scheefsymmetrische $\lambda\times\lambda$ matrix van rang 2μ is, dan vormen de oplossingen in reële $\lambda\times\nu$ matrices X van de vergelijking

$$X'TX = 0$$

een variëteit, die in de omgeving van elk harer punten de volgende dimensie d_1 heeft:

$$d_1 = \lambda\nu - \tfrac{1}{2}\nu(\nu-1) \qquad \text{als } \nu \leq \mu,$$
$$d_1 = \tfrac{1}{2}\mu(\mu+1) + \nu(\lambda-\mu) \qquad \text{als } \nu \geq \mu.$$

Bewijs: Op grond van hulpstelling 1 bestaat er een reële niet-singuliere $\lambda\times\lambda$ matrix P, dusdanig dat

$$T_1 = P'TP = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{2\mu} & \overbrace{\quad}^{\lambda-2\mu} \end{array} \\ \begin{pmatrix} T_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}2\mu \\ \}\lambda-2\mu \end{array},$$

waarin T_2 een niet-singuliere scheefsymmetrische matrix is. Schrijven we X=PY, dan is $X'TX=Y'T_1Y$. We kunnen dus ook de vergelijking $Y'T_1Y=0$

beschouwen. Splitsen we Y als volgt

$$Y = \begin{array}{c} \nu \\ \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \} \; 2\mu \\ \} \; \lambda-2\mu \end{array},$$

dan is $Y'T_1Y=Y_1{}'T_2Y_1$. We kunnen dus Y_2 blijkbaar willekeurig kiezen hetgeen $(\lambda-2\mu)\nu$ parameters oplevert. We merken verder op dat als we van de in onze hulpstelling vermelde waarden van d_1 het bedrag $(\lambda-2\mu)\nu$ aftrekken, de uitkomst gelijk is aan hetgeen bij substitutie van 2μ voor λ in deze waarden van d_1 gevonden wordt. Uit dit alles volgt, dat het voldoende is de hulpstelling te bewijzen voor het geval dat $\lambda=2\mu$, d.w.z. voor het geval dat T niet-singulier is.

We nemen dus aan dat T niet-singulier is. We leiden eerst enige eigenschappen van de oplossingen van de vergelijking $X'TX=0$ af. Laat X een dergelijke oplossing zijn; de rang van X noemen we k. We splitsen X in ν kolomvectoren $x_1,\dots,x_\nu$. Er geldt dan blijkbaar:

(1) $\qquad x_j{}'Tx_h=0$ voor $j,h=1,\dots,\nu$.

Omgekeerd levert ieder stelsel $x_1,\dots,x_\nu$, dat aan (1) voldoet een oplossing van $X'TX=0$. We merken op, dat $z'Tz=0$ voor iedere vector z geldt, zodat (1) alleen voor $j\neq h$ geeist behoeft te worden. Verder levert iedere permutatie van $x_1,\dots,x_\nu$ ook een oplossing.

We keren terug tot onze oplossing X van rang k. Er zijn dan k lineair onafhankelijke vectoren onder $x_1,\dots,x_\nu$, waarvan de overige lineaire combinaties zijn. Laat deze k vectoren $x_1,\dots,x_k$ zijn. Op grond van (1) is elk der vectoren $Tx_1,\dots,Tx_k$ orthogonaal op elk der vectoren $x_1,\dots,x_k$. Omdat T niet-singulier is, zijn $Tx_1,\dots,Tx_k$ lineair onafhankelijk. Hieruit volgt $2k\leq 2\mu$, dus $k\leq\mu$. Op grond van zijn definitie geldt voor k verder $0\leq k\leq\nu$.

Vervangen we $x_{k+1},\dots,x_\nu$ door vectoren $y_{k+1},\dots,y_\nu$ die ook elk lineair afhankelijk van $x_1,\dots,x_k$ maar overigens willekeurig zijn, dan is het stelsel $x_1,\dots,x_k, y_{k+1},\dots,y_\nu$ ook een oplossing. We kunnen n.l. $y_j=\sum_{h=1}^{k}\alpha_{jh}x_h$ schrijven; substitutie levert direct dat (1) voor dit stelsel vervuld is.

We kiezen nu een A, waarvoor $A'TA=0$. We willen de oplossingen beschouwen, die weinig van A verschillen. Laat m de rang van A zijn, dan geldt $0\leq m\leq\nu$ en $m\leq\mu$. We noemen de kolomvectoren waarin A te splitsen is $a_1,\dots,a_\nu$. Zonder beperking van de algemeenheid mogen we veronderstellen dat $a_1,\dots,a_m$ lineair onafhankelijk zijn. Voor matrices X die voldoende dicht bij A liggen, met splitsing $x_1,\dots,x_\mu$, zijn $x_1,\dots,x_m$ lineair onafhankelijk. Voor zulke X, die voldoen aan $X'TX=0$, voldoet de rang k dus aan $m\leq k\leq\nu$ en $k\leq\mu$. We beschouwen eerst de oplossingen, waarvoor k een gegeven waarde heeft. Zonder beperking van de algemeenheid kunnen we $x_1,\dots,x_k$ lineair onafhankelijk veronderstellen. We kunnen dan x_1 willekeurig, mits dicht bij a_1 kiezen; dit geeft 2μ parameters. Als $m \geqslant 2$ moet x_2 orthogonaal op Tx_1 zijn; daar a_2 orthogonaal op Ta_1 is en x_1 dicht bij a_1 ligt, kan x_2 dicht bij a_2 worden gekozen; dit geeft $2\mu-1$ parameters. We kiezen x_2 zo dicht bij a_2 dat Tx_1 en Tx_2 lineair onafhankelijk zijn. Als $m \geqslant 3$, moet x_3 orthogonaal op Tx_1 en Tx_2 zijn; daar a_3 orthogonaal op Ta_1 en Ta_2 is, kan x_3 dicht bij a_3 worden gekozen; dit geeft $2\mu-2$ parameters. We kiezen x_3 zo dicht bij a_3 dat Tx_1, Tx_2 en Tx_3 lineair onafhankelijk zijn. Zo voortgaande vinden we voor de lineair onafhankelijke $x_1,\dots,x_m$ nu $2\mu+(2\mu-1)+\dots+$ $+(2\mu-m+1)$ parameters. Als $k \geqslant m+1$ wordt voor x_{m+1} nu vereist dat hij lineair onafhankelijk van $x_1,\dots,x_m$ is, orthogonaal op $Tx_1,\dots,Tx_m$ is en dicht bij a_m ligt. Daar $2m < 2k \leqslant 2\mu$ is dit mogelijk en wel geeft dit $2\mu-m$ parameters. Zo voortgaande vinden we voor de lineair onafhankelijke $x_1,\dots,x_k$ nu $2\mu+(2\mu-1)+\dots+(2\mu-k+1)=2\mu k-\frac{1}{2}k(k-1)$ parameters. Als $\nu > k$ zijn op grond van het bovenstaande $x_{k+1},\dots,x_\nu$ nu vrij als lineaire combinaties van $x_1,\dots,x_k$ te kiezen; omdat de ruimte voortgebracht door $x_1,\dots,x_k$ dicht ligt bij de ruimte voortgebracht door $a_1,\dots,a_m$ (waar $a_{k+1},\dots a_\nu$ in liggen) is het ook mogelijk $x_{k+1},\dots,x_\nu$ dicht bij resp. $a_{k+1},\dots,a_\nu$ te kiezen. Voor deze vectoren vinden we nog $(\nu-k)k$ parameters. In totaal wordt het aantal parameters dus

$$(2)\qquad -\tfrac{3}{2}k^2 + (2\mu+\nu+\tfrac{1}{2})k.$$

Voor continu veranderlijke k heeft deze functie een maximum voor $k=\frac{1}{3}(2\mu+\nu+\frac{1}{2})$. We gaan nu na voor welke toegelaten waarde van k de functie (2) maximaal wordt. We onderscheiden twee gevallen:

1° $\nu \leqslant \mu$. Dan is $\frac{1}{3}(2\mu+\nu+\frac{1}{2}) \geqslant \nu+\frac{1}{6}$. De grootste toegelaten waarde van k is ν; bij deze waarde wordt (2) maximaal. Het maximum is

$$2\mu\nu - \tfrac{1}{2}\nu(\nu-1).$$

2° $\nu \geqslant \mu$. Dan is $\frac{1}{3}(2\mu+\nu+\frac{1}{2}) \geqslant \mu+\frac{1}{6}$. De grootste toegelaten waarde van k is μ; bij deze waarde wordt (2) maximaal. Het maximum is $\frac{1}{2}\mu(\mu+1)+\mu\nu$.

Het grootste aantal parameters wordt dus gevonden door k zo groot mogelijk te kiezen; de dimensie is dus gelijk aan de hierboven gevonden waarden, die juist de in onze hulpstelling vermelde waarden voor $\lambda=2\mu$ zijn. De hulpstelling is hiermee bewezen.

Hulpstelling 8. Als T een reële scheefsymmetrische $t \times t$ matrix en U een reële $t \times q$ matrix is en als de (scheefsymmetrische) matrix

$$\Lambda = \begin{array}{cl} \begin{matrix} \overbrace{\quad}^{q} & \overbrace{\quad}^{t} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & U' \\ -U & T \end{pmatrix} & \begin{matrix} \}\, q \\ \}\, t \end{matrix} \end{array}$$

rang 2p heeft, dan vormen de oplossingen in reële $t \times q$ matrices X van de vergelijking

$$(3) \qquad X'TX - X'U + U'X = 0$$

een variëteit, die in de omgeving van de nulmatrix de volgende dimensie d_2 heeft:

$$d_2 = tq - \tfrac{1}{2}q(q-1) \qquad \text{als } q \leq p,$$

$$d_2 = \tfrac{1}{2}p(p+1) + q(t-p) \qquad \text{als } q \geq p.$$

Bewijs: We beginnen met de volgende betrekking:

$$(4) \quad (I \quad X') \begin{pmatrix} 0 & U' \\ -U & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix} = X'TX - X'U + U'X.$$

We passen nu hulpstelling 7 toe met T, λ, μ en ν vervangen resp. door Λ, $q+t$, p en q en wel beschouwen we een omgeving van de matrix

$$(5) \qquad \begin{array}{cl} \overbrace{\quad}^{q} & \\ \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \}\, q \\ \}\, t \end{matrix} \end{array}.$$

Het aantal parameters, waarvan deze oplossingen afhangen is dus volgens hulpstelling 7:

$$(6) \quad \begin{cases} (q+t)q-\tfrac{1}{2}q(q-1) & \text{als } q \leq p, \\ \tfrac{1}{2}p(p+1)+q(q+t-p) & \text{als } q \geq p. \end{cases}$$

Deze oplossingen schrijven we in de vorm

$$(7) \qquad \begin{array}{cl} \overbrace{\quad}^{q} & \\ \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \}\, q \\ \}\, t \end{matrix} \end{array} ;$$

voor voldoende dicht bij (5) gelegen oplossingen is Y_1 niet-singulier. Als (7) een oplossing is, is de matrix, die door rechtsvermenigvuldiging met Y_1^{-1} hieruit ontstaat ook een oplossing en wel een van de gedaante

$$(8) \qquad \begin{array}{cl} \overbrace{\quad}^{q} & \\ \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix} & \begin{matrix} \}\, q \\ \}\, t \end{matrix} \end{array}$$

met een X die weinig van de nulmatrix verschilt, omdat Y_1^{-1} weinig van I en Y_2 weinig van de nulmatrix verschilt. Gaan we omgekeerd van een oplossing van de gedaante (8) met X dicht bij de nulmatrix uit, dan levert rechtsvermenigvuldiging met een willekeurige niet-singuliere weinig van I verschillende $q \times q$ matrix een oplossing op van de gedaante (7) met Y_1 dicht bij I en Y_2 dicht bij de nulmatrix. Omdat niet-singuliere $q \times q$ matrices van q^2 parameters afhangen en op grond van (4) vinden we het gezochte aantal parameters door (6) met q^2 te verminderen hetgeen juist het in onze hulpstelling vermelde aantal oplevert.

Hulpstelling 9. Als T een reële scheefsymmetrische $n \times n$ matrix van rang 2u is, dan bestaat er bij iedere voldoend dicht bij de nulmatrix gelegen reële scheefsymmetrische $n \times n$ matrix F, waarvoor T+F rang 2u heeft, een niet-singuliere reële $n \times n$ matrix X zodat $X'(T+F)X=T$. Hierbij kan X in een willekeurig kleine omgeving van I worden genomen, als F voldoende dicht bij de nulmatrix ligt.

Opmerking: Het essentiële resultaat van deze hulpstelling ligt in de bewering over het weinig van I verschillen. Zonder deze toevoeging is zij een direct gevolg van hulpstelling 1.

Bewijs: Kies bij T een P, zodat $P'TP=T_1$ de in hulpstelling 1 aangegeven kanonieke gedaante heeft. Noem $F_1=P'FP$ en $Y=P^{-1}XP$, dan gaat $X'(T+F)X=T$ over in $Y'(T_1+F_1)Y=T_1$. Het probleem is daarmee gereduceerd tot het geval dat T de kanonieke gedaante heeft. Stel nu

$$(9) \qquad T_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{n-2u} & \overbrace{\quad}^{2u} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\ n-2u \\ \}\ 2u \end{array}$$

met T_2 niet-singulier en in de kanonieke gedaante. Stel verder

$$(10) \qquad F_1 \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{n-2u} & \overbrace{\quad}^{2u} \end{array} \\ \begin{pmatrix} F_2 & F_3 \\ -F_3' & F_4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\ n-2u \\ \}\ 2u \end{array} ,$$

met scheefsymmetrische F_2 en F_4. Omdat T_1+F_1 niet-singulier en F_1 klein is, is T_2+F_4 niet-singulier en $(T_2+F_4)^{-1}$ begrensd. Op grond van hulpstelling 2 is er een reële $2u \times (n-2u)$ matrix U zodat

$$(11) \qquad -F_3' = (T_2 + F_4)U$$

$$(12) \qquad F_2 = F_3U.$$

Hieruit volgt

$$(13) \qquad F_2 = U'(T_2 + F_4)U.$$

Verder is U klein. Nu is

$$\begin{pmatrix} I & -U' \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot (T_1 + F_1) \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ -U & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_2+F_4 \end{pmatrix} .$$

De hier gebruikte transformatiematrix verschilt weinig van I.
We behoeven het probleem nu nog slechts voor de niet-singuliere matrix

T_2 op te lossen. Als n.l. een weinig van I verschillende $2u \times 2u$ matrix Z gevonden wordt, zodat $Z'(T_2+F_4)Z=T_2$, dan geldt

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_2+F_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} .$$

Dit is echter stapsgewijs uitvoerbaar. Het is duidelijk dat het optellen van een klein veelvoud van een kolom bij een andere kolom gevolgd door dezelfde operatie op de overeenkomstige rijen een toegelaten operatie is. In de eerste rij van T_2+F_4 staat op de eerste plaats een nul, op de tweede plaats een getal dat weinig van 1 verschilt en op de overige plaatsen getallen die weinig van 0 verschillen. Door kleine veelvouden van de tweede kolom bij de derde tot en met de $2u^e$ kolom op te tellen kan men verkrijgen dat in de eerste rij op de derde tot en met de $2u^e$ plaats nullen staan. De overeenkomstige operatie op rijen toegepast levert nullen in de eerste kolom op de derde tot en met de $2u^e$ plaats. Vervolgens kan men op soortgelijke wijze in de tweede rij en de tweede kolom op de derde tot en met $2u^e$ plaats nullen krijgen; op de tweede plaats staat uiteraard een nul, omdat de matrix scheefsymmetrisch is (als u=1 zijn deze operaties overbodig). Vervolgens kan men door de eerste rij en de eerste kolom met een weinig van 1 verschillende factor te vermenigvuldigen (hetgeen ook een toegelaten transformatie is) verkrijgen, dat de getransformeerde matrix de gedaante

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \overbrace{0 \; \cdots \; 0}^{2u-2} \\ -1 & 0 & 0 \; \cdots \; 0 \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & T_3+F_5 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} 2u-2 \end{array}$$

krijgt, waarin T_3 niet-singulier en van de kanonieke gedaante en F_5 scheefsymmetrisch en klein is. Zo voortgaande kan men het gezochte resultaat bereiken.

<u>Hulpstelling 10.</u> De reële scheefsymmetrische $n \times n$ matrices van rang 2u vormen een variëteit, die in de omgeving van elk dezer matrices dimensie $-2u^2+(2n-1)u$ heeft.

<u>Bewijs</u>: Kies een reële symmetrische $n \times n$ matrix T van rang 2u en vorm hierbij als in het bewijs van hulpstelling 9 een matrix T_1 van de gedaante (9). Het is voldoende het probleem voor T_1 in plaats van T op te lossen. Laat F_1 een kleine scheefsymmetrische matrix van de gedaante (10) zijn. Het feit dat T_1+F_1 rang 2u heeft, impliceert het bestaan van een matrix U zodat (11), (12) en (13) gelden. Als omgekeerd U en een scheefsymmetrische F_4 klein gekozen worden en F_2 en F_3 uit (13) en (11) worden bepaald, is aan alle vereisten voldaan. Dit geeft $2u(n-2u)+u(2u-1)=-2u^2+(2n-1)u$ parameters.

Na deze hulpstellingen beginnen we aan het bewijs van onze stelling. We geven het bewijs in drie stappen.

I. Variatie van C bij vaste D.

We kiezen een vaste reële scheefsymmetrische $n \times n$ matrix D van rang $2u$ met $u \leq s$ en trachten de dimensie van de variëteit der reële symmetrische $n \times n$ matrices C te bepalen, waarvoor C+D rang s heeft. Kiezen we bij D een vaste P als in hulpstelling 1, dan heeft $P'(C+D)P = P'CP+P'DP$ dan en slechts dan rang s als C+D rang s heeft en is $P'CP$ dan en slechts dan symmetrisch en reëel als C symmetrisch en reëel is. De gezochte dimensie is dus dezelfde als die van de variëteit van de reële symmetrische matrices C_1, waarvoor $C_1+P'DP$ rang s heeft. Hieruit volgt, dat de afhankelijkheid van D van de gezochte dimensie uitsluitend een afhankelijkheid van de rang van D, dus van u is. We kunnen deze dimensie dus door $f(n,s,u)$ voorstellen.

We kiezen bij de gegeven D nu eerst een vaste C_2, zodat C_2+D rang s heeft, hetgeen op grond van hulpstelling 6 mogelijk is. Nu kiezen we bij C_2+D een reële P als in hulpstelling 3 dusdanig dat in $P'(C_2+D)P$ de eerste n-s kolommen uitsluitend uit nullen bestaan. We kunnen dus schrijven

$$(14) \qquad P'(C_2+D)P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{n-s} & \overbrace{}^{s} \end{array} \\ \begin{pmatrix} O & K \\ O & L \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\, n-s \\ \}\, s \end{array} \quad .$$

In deze matrix zijn de laatste s kolommen onafhankelijk. We willen nu C+D beschouwen, waarbij C weinig van C_2 verschilt en nagaan van hoeveel parameters C afhangt als C+D rang s heeft. In plaats daarvan kunnen we blijkbaar ook bij $P'(C_2+D)P$ een dicht bij de nulmatrix gelegen reële symmetrische $n \times n$ matrix E optellen en nagaan van hoeveel parameters E afhangt, als $P'(C_2+D)P+E$ rang s heeft. We schrijven

$$E = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{n-s} & \overbrace{}^{s} \end{array} \\ \begin{pmatrix} E_1 & E_2' \\ E_2 & E_3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\, n-s \\ \}\, s \end{array} ,$$

waarin E_1 en E_3 symmetrisch zijn. Nu is

$$P'(C_2+D)P+E = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{n-s} & \overbrace{}^{s} \end{array} \\ \begin{pmatrix} E_1 & K+E_2' \\ E_2 & L+E_3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\, n-s \\ \}\, s \end{array} \quad .$$

We kiezen E_2 en E_3 zo klein dat ook in deze matrix de laatste s kolommen onafhankelijk zijn. Op grond van hulpstelling 2 is er nu een reële $s \times (n-s)$ matrix M, dusdanig dat

$$(15) \qquad E_2 = (L + E_3)M$$

(16) $$E_1 = (K + E_2{}')M.$$

Hieruit volgt

(17) $$E_1 = KM + M'(L' + E_3)M.$$

Omdat E_1 en E_3 symmetrisch zijn volgt hieruit

(18) $$M'(L-L')M + M'K' - KM = 0.$$

Kiezen we nu omgekeerd E_3 symmetrisch en M dicht bij de nulmatrix dusdanig dat (18) vervuld is, dan kunnen we E_2 en E_1 uit (15) en (17) bepalen. Dan voldoet E aan alle vereisten. Omdat M door (15) en (16) ondubbelzinnig bepaald is (zie hulpstelling 2), is het aantal parameters, waarvan E_3 en M afhangen het gezochte aantal parameters. Voor E_3 is dit aantal $\frac{1}{2}s(s+1)$. Om dit aantal voor M te bepalen bedenken we, dat (18) een vergelijking is van het type, dat in hulpstelling 8 is beschouwd. Met Λ correspondeert nu

$$\begin{array}{cc} \overbrace{}^{n-s} & \overbrace{}^{s} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & K \\ -K' & L-L' \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, n-s \\ \}\, s \end{array} ,$$

maar dit is twee maal het scheefsymmetrische deel van (14), dus $2P'DP$ en heeft dus dezelfde rang als D, dat is $2u$.

We passen nu hulpstelling 8 toe met t,q,p en X vervangen door $s,n-s,u$ en M. We vinden voor het totale aantal parameters van E_3 en M en daarmee voor de functie $f(n,s,u)$:

(19) $$\begin{cases} f(n,s,u) = \frac{1}{2}u^2-(n-s-\frac{1}{2})u+sn-\frac{1}{2}s(s-1) \text{ als } u \leq n-s, \\ f(n,s,u) = \frac{1}{2}(n-s)(3s-n+1) + \frac{1}{2}s(s+1) \text{ als } u \geq n-s. \end{cases}$$

II. Variatie van A bij vaste D.

We gaan nu trachten iets analoogs voor het Hermitische deel te doen. We kiezen weer een vaste reële scheefsymmetrische $n \times n$ matrix D van rang $2u$ met $u \leq r$ en trachten de dimensie van de variëteit der reële symmetrische $n \times n$ matrices A te bepalen, waarvoor $A+iD$ rang r heeft. Op geheel analoge wijze als hierboven is geschied kunnen we beredeneren dat de afhankelijkheid van D van deze dimensie uitsluitend een afhankelijkheid van de rang van D is. We kunnen deze dimensie dus door $g(n,r,u)$ voorstellen. We zullen bewijzen, dat $g(n,r,u)=f(n,r,u)$.

We kiezen bij de gegeven D nu een vaste A_1, zodat A_1+iD rang r heeft, hetgeen op grond van hulpstelling 5 mogelijk is. We kiezen nu een permutatiematrix P dusdanig dat in $P'(A_1+iD)P$ de laatste r kolommen onafhankelijk zijn. Op grond van hulpstelling 2 bestaat er een (in het algemeen complexe) $r \times (n-r)$ matrix U zodat $P'(A_1+iD)P=H$ de gedaante

$$\begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{n-r} & \overbrace{\quad}^{r} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} LU & L \\ KU & K \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, n-r \\ \}\, r \end{matrix}$$

krijgt, waarin K een Hermitische $r \times r$ matrix en L een complexe $(n-r)\times r$ matrix is. Omdat de hele matrix Hermitisch is, geldt

$$L = \overline{U}'K,$$

dus

$$H = \begin{pmatrix} \overbrace{\overline{U}'KU}^{n-r} & \overbrace{\overline{U}'K}^{r} \\ KU & K \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, n-r \\ \}\, r \end{matrix} .$$

In de deelmatrix van deze matrix bestaande uit de laatste r kolommen, die rang r heeft, zijn de eerste $n-r$ rijen lineaire combinaties van de laatste r. Hieruit volgt dat K niet-singulier is.(Het is trouwens bekend, dat een Hermitische matrix van rang r een $r \times r$ hoofdminor $\neq 0$ bevat).

We gaan nu bij H een dicht bij de nulmatrix gelegen reële symmetrische $n \times n$ matrix E optellen en nagaan van hoeveel parameters E afhangt, als $H+E$ rang r heeft. We beperken ons daarbij vooreerst tot een speciaal geval, n.l. dat E de gedaante

$$\begin{pmatrix} \overbrace{E_1}^{n-r} & \overbrace{E_2'}^{r} \\ E_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, n-r \\ \}\, r \end{matrix}$$

met symmetrische E_1 heeft. Nu is

$$H+E= \begin{pmatrix} \overbrace{\overline{U}'KU + E_1}^{n-r} & \overbrace{\overline{U}'K + E_2'}^{r} \\ KU + E_2 & K \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, n-r \\ \}\, r \end{matrix} .$$

Op grond van hulpstelling 2 is er een (in het algemeen complexe) $r \times (n-r)$ matrix M, dusdanig dat

$$(20) \qquad \begin{aligned} \overline{U}'KU + E_1 &= (\overline{U}'K + E_2')M \\ KU + E_2 &= KM. \end{aligned}$$

Omdat K niet-singulier is, is

$$M = U + K^{-1}E_2 .$$

Substitutie hiervan in (20) levert

$$(21) \qquad E_1 = E_2{}'K^{-1}E_2 + E_2{}'U + \overline{U}'E_2.$$

Het rechterlid is zeker Hermitisch. Het feit dat E_1 symmetrisch en reëel is levert de volgende betrekking:

$$(22) \qquad E_2{}'(K^{-1}-\overline{K}^{-1})E_2 - E_2{}'(\overline{U}-U) + (\overline{U}'-U')E_2 = 0.$$

Kiezen we nu omgekeerd E_2 reëel, dusdanig dat (22) vervuld is en bepalen we E_1 uit (21), dan voldoet E aan alle vereisten (behoudens de gekozen speciale gedaante). Als we (22) met $(2i)^{-1}$ vermenigvuldigen, is het een vergelijking van het type dat in hulpstelling 8 is beschouwd. Met Λ correspondeert nu

$$(23) \qquad \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{-\frac{1}{2i}(\overline{U}-U)}}^{n-r} \; \overbrace{\hphantom{\frac{1}{2i}(K^{-1}-\overline{K}^{-1})}}^{r} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2i}(U'-\overline{U}') \\ -\frac{1}{2i}(\overline{U}-U) & \frac{1}{2i}(K^{-1}-\overline{K}^{-1}) \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\, n-r \\ \}\, r \end{array} .$$

Nu is echter

$$\begin{pmatrix} iI & -iU' \\ 0 & i\overline{K}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{U}'KU & \overline{U}'K \\ KU & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iI & 0 \\ -iU & iK^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & U'-\overline{U}' \\ 0 & -\overline{K}^{-1} \end{pmatrix} .$$

Van deze matrix is het scheefsymmetrische deel juist i maal de matrix (23). De rang van (23) is dus dezelfde als de rang van het scheefsymmetrische deel van H, die gelijk is aan de rang van D, dat is 2u.

Passen we nu hulpstelling 8 toe met t,q,p en X vervangen door r,n-r, u en E_2, dan vinden we voor het aantal parameters voor E_2:

$$(24) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}u^2-(n-r-\frac{1}{2})u+r(n-r) & \text{als } u \leq n-r, \\ \frac{1}{2}(n-r)(3r-n+1) & \text{als } u \geq n-r. \end{cases}$$

We kunnen nu makkelijk bewijzen, dat $g(n,r,u) \leq f(n,r,u)$. Het is n.l. duidelijk dat de volgende situatie het grootst denkbare aantal parameters oplevert. De uitgangsmatrix H is dusdanig dat bij iedere voldoend dicht bij de nulmatrix gelegen reële symmetrische $r \times r$ matrix E_3 een dicht bij de nulmatrix gelegen reële $r \times (n-r)$ matrix E_2 en een dicht bij de nulmatrix gelegen reële symmetrische $(n-r)\times(n-r)$ matrix E_1 bestaat dusdanig dat, als E de met deze deelmatrices opgebouwde matrix is, de matrix H+E rang r heeft. Als dat zo is, kan E_2 nog gevarieerd worden (met een daaruit voortvloeiende variatie van E_1) volgens (24). In verband met de hierboven gegeven afleiding van f(n,s,u),volgt hieruit dat het aantal parameters dan f(n,r,u) is. Dus $g(n,r,u) \leq f(n,r,u)$.

Om te bewijzen dat g(n,r,u)=f(n,r,u) behoeven we slechts aan te tonen, dat de uitgangsmatrix H zo gekozen kan worden, dat de hierboven beschreven ideale situatie optreedt. Hiertoe onderscheiden we weer twee gevallen.

1°. $u \leq n-r$. We kiezen

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{u} & \overbrace{\quad}^{n-r-u} & \overbrace{\quad}^{u} & \overbrace{\quad}^{r-u} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} I & 0 & iI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -iI & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\ u \\ \}\ n-r-u \\ \}\ u \\ \}\ r-u \end{array},$$

die klaarblijkelijk Hermitisch is, rang r heeft en waarvan het imaginaire deel rang 2u heeft. We nemen nu een kleine reële symmetrische $r \times r$ matrix E_3:

$$E_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{u} & \overbrace{\quad}^{r-u} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} E_4 & E_5 \\ E_5' & E_6 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\ u \\ \}\ r-u \end{array}.$$

Het blijkt nu mogelijk $E_2=0$ te nemen. Bepalen we de $u \times u$ matrix U_1 en de $(r-u) \times u$ matrix U_2 uit

$$(I + E_4)U_1 + E_5U_2 = -iI$$
$$E_5'U_1 + (I + E_6)U_2 = 0,$$

dan moet $(iI)U_1 - I = iU_1 - I$ reëel en symmetrisch zijn. Nu is

$$U_2 = -(I + E_6)^{-1}E_5'U_1,$$
$$(I + E_4 - E_5(I + E_6)^{-1}E_5')U_1 = -iI,$$
$$U_1 = -i(I + E_4 - E_5(I + E_6)^{-1}E_5')^{-1},$$

zodat aan deze vereiste inderdaad voldaan is. Als $u=r$ treedt een kleine wijziging in het overigens analoog verlopende bewijs op.

2°. $u > n-r$. We kiezen

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{n-r} & \overbrace{\quad}^{n-r} & \overbrace{\qquad}^{2(u-n+r)} & \overbrace{\quad}^{n-2u} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} I & iI & 0 & 0 \\ -iI & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iT & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\ n-r \\ \}\ n-r \\ \}\ 2(u-n+r) \\ \}\ n-2u \end{array},$$

waarin T een niet-singuliere reële scheefsymmetrische matrix is. Dan is H hermitisch van rang r en heeft het imaginaire deel van H rang 2u. We nemen weer een kleine reële symmetrische $r \times r$ matrix E_3:

$$E_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\quad}^{n-r} & \overbrace{\qquad}^{2(u-n+r)} & \overbrace{\quad}^{n-2u} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} E_4 & E_5 & E_6 \\ E_5' & E_7 & E_8 \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\ n-r \\ \}\ 2(u-n+r) \\ \end{array}.$$

Hier moet een reële $r \times (n-r)$ matrix E_2 bij gevonden worden:

$$E_2 = \begin{array}{c} n-r \\ \overbrace{\phantom{E_{10}}} \\ \begin{pmatrix} E_{10} \\ E_{11} \\ E_{12} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \} \; n-r \\ \} \; 2(u-n+r) \\ \} \; n-2u \end{array} .$$

Bepalen we nu de matrix U

$$U = \begin{array}{c} n-r \\ \overbrace{} \\ \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \} \; n-r \\ \} \; 2(u-n+r) \\ \} \; n-2u \end{array} ,$$

zodat

$$(25) \quad \begin{cases} (I+E_4)U_1+E_5U_2+E_6U_3=-iI+E_{10} \\ E_5{}'U_1+(iT+E_7)U_2+E_8U_3=E_{11} \\ E_6{}'U_1+E_8{}'U_2+(I+E_9)U_3=E_{12} \end{cases} ,$$

dan moet

$$(26) \qquad \overline{U}' \begin{pmatrix} I+E_4 & E_5 & E_6 \\ E_5{}' & iT+E_7 & E_8 \\ E_6{}' & E_8{}' & I+E_9 \end{pmatrix} \qquad U - I$$

reëel en symmetrisch zijn.

We kunnen ook omgekeerd U kiezen en E_{10}, E_{11} en E_{12} uit (25) bepalen; deze moeten dan reëel en klein zijn. We kiezen U_2 reëel, U_3 zuiver imaginair ($U_3=iU_6$ met reële U_6) en schrijven $U_1=U_4+iU_5$ met reële U_4 en U_5.

Er wordt dus geëist:

$$(27) \qquad \begin{cases} (I+E_4)U_5 + E_6U_6 = -I \\ E_5{}'U_5 + TU_2 + E_8U_6 = 0 \\ E_6{}'U_5 + (I+E_9)U_6 = 0. \end{cases}$$

Uit de eerste en de derde vergelijking zijn U_6 en U_5 op te lossen en vervolgens uit de tweede U_2. Nu zijn U_6 en U_2 klein; U_5 verschilt weinig van $-I$, want

$$U_5 = -(I+E_4-E_6(I+E_9)^{-1}E_6{}')^{-1} .$$

Uit (25) volgt nu

$$(28) \qquad \begin{cases} (I+E_4)U_4+E_5U_2 = E_{10} \\ E_5{}'U_4 + E_7U_2 = E_{11} \\ E_6{}'U_4 + E_8{}'U_2 = E_{12} . \end{cases}$$

Nu wordt (26):

$$(U_4' \; -iU_5' \; U_2' \; -iU_6')\begin{pmatrix}-iI+E_{10}\\ E_{11}\\ E_{12}\end{pmatrix} -I =$$

$$= U_4'E_{10}-U_5'+U_2'E_{11}+i(-U_4'-U_5'E_{10}-U_6'E_{12}).$$

Daar (26) automatisch Hermitisch is, is het voldoende te eisen dat (26) reëel is. Dit geeft (gebruik makend van (28) en van de getransponeerden van de vergelijkingen (27):

$$-U_4'-U_5'E_{10}-U_6'E_{12} =$$
$$= -U_4'-U_5'(I+E_4)U_4-U_5'E_5U_2-U_6'E_6'U_4-U_6'E_8'U_2 =$$
$$= -U_4'+U_4-U_2'TU_2 = 0.$$

Hieraan is te voldoen door $U_4=\frac{1}{2}U_2'TU_2$ te kiezen. Dan is U_4 klein; uit (28) blijkt, dat dan ook E_{10}, E_{11} en E_{12} klein zijn.

Als $2u=n$ treedt een kleine wijziging in het overigens analoog verlopende bewijs op.

Hiermee is het bewijs, dat $g(n,r,u)=f(n,r,u)$ voltooid.

III. Variatie van D.

We gaan nu ook de scheefsymmetrische matrix D variëren; hierbij houden we echter de rang 2u van D voorlopig vast. We veronderstellen natuurlijk, dat $u \leq r$ en $u \leq s$. Het aantal parameters waarvan een kleine variatie van D, die de rang 2u laat, afhangt is $-2u^2+(2n-1)u$ op grond van hulpstelling 10. De situatie die het maximaal denkbare aantal parameters oplevert is nu die waarbij de uitgangsmatrices A,C en D zo gekozen zijn, dat D rang 2u, A+iD rang r en C+D rang s heeft, dusdanig dat bij iedere D_1 van rang 2u die weinig van D verschilt een A_1, die weinig van A verschilt, en een C_1 die weinig van C verschilt, bestaat, zodat A_1+iD_1 rang r en C_1+D_1 rang s heeft en zodat, bij vasthouden van D_1, in A_1 een variatie, die van $f(n,r,u)$ parameters afhangt, en in C_1 een variatie, die van $f(n,s,u)$ parameters afhangt, mogelijk is. In dat geval zou het totale aantal parameters in A,C en D samen gelijk zijn aan

(29) $$f(n,s,u) + f(n,r,u) - 2u^2 + (2n-1)u.$$

We tonen nu eerst aan, dat de hierboven beschreven ideale situatie inderdaad optreedt. Het bewijs berust hoofdzakelijk op hulpstelling 9. We kiezen eerst matrices A,C en D, die als uitgangsmatrix voor de variatie van A en C bij vaste D het maximale aantal parameters in A en C geven (alleen bij de afleiding van $g(n,r,u)$ is van een speciale keuze van de uitgangsmatrix gebruik gemaakt). Nu nemen we een D_1 dicht bij D. Op grond van hulpstelling 9 is er een X die weinig van I verschilt, zodat

$X'D_1X=D$. Kies nu $A_1=(X')^{-1}AX^{-1}$ en $C_1=(X')^{-1}CX^{-1}$, dan zijn A_1 en C_1 symmetrisch en verschillen weinig van A, resp. C. Verder is $X'(A+iD)X = A_1+iD_1$ en $X'(C+D)X = C+iD$, zodat variatie van A_1 en C_1 bij vaste D_1 hetzelfde aantal parameters oplevert als variatie van A en C bij vaste D.

We gaan nu (29) nader onderzoeken en wel zoeken we het maximum van deze uitdrukking als u varieert. We gebruiken hierbij (19). De grenzen waartussen u kan variëren zijn $0 \leq u \leq [\frac{1}{2}n]$, $u \leq r$, $u \leq s$.

We veronderstellen eerst $r \leq s$ en onderscheiden drie gevallen.

1^0 $r \leq \frac{1}{2}n$ en $r+s \leq n$. Dan is $n-r \geq r$ en $n-s \geq r$. Verder varieert u tussen 0 en r. Nu wordt (29):

(30) $-u^2+(r+s)u+(r+s)n-\frac{1}{2}r(r-1)-\frac{1}{2}s(s-1)$.

Voor continu veranderlijke u heeft deze functie een maximum voor $u=\frac{1}{2}(r+s) \geq r$. Voor de toegelaten waarden van u wordt (30) dus maximaal als $u=r$. De maximale waarde is dan

(31) $(r+s)n+rs-\frac{1}{2}r(r-1)-\frac{1}{2}s(s-1)$.

2^0 $r \leq \frac{1}{2}n$ en $r+s \geq n$. Dan is $n-r \geq r$ en $n-s \leq r$. Verder varieert u tussen 0 en r. Voor $0 \leq u \leq n-s$ wordt (29) gelijk aan (30). Op analoge wijze als in geval 1^0 ziet men in dat dit maximaal is voor $u=n-s$. Voor $n-s \leq u \leq r$ wordt (29):

(32) $-\frac{3}{2}u^2+(n+r-\frac{1}{2})u+rn-\frac{1}{2}r(r-1)+\frac{1}{2}(n-s)(3s-n+1)+\frac{1}{2}s(s+1)$.

Voor continu veranderlijke u heeft deze functie een maximum voor $u=\frac{1}{3}(n+r-\frac{1}{2}) \geq r-\frac{1}{6}$. Voor gehele u met $n-s \leq u \leq r$ wordt (32) dus maximaal als $u=r$. Verder geldt voor $u=n-s$, dat (30)=(32). Voor gehele u met $0 \leq u \leq r$ wordt (29) dus maximaal voor $u=r$. De maximale waarde is dan

(33) $-\frac{1}{2}n^2+(2r+2s+\frac{1}{2})n-r^2-s^2$.

3^0 $r \geq \frac{1}{2}n$. Dan is $n-s \leq n-r \leq \frac{1}{2}n$ en $r+s \geq n$. Verder varieert u tussen 0 en $[\frac{1}{2}n]$. Voor $0 \leq u \leq n-s$ wordt (29) gelijk aan (30). Wederom is dit maximaal voor $u=n-s$. Voor $n-s \leq u \leq n-r$ wordt (29) gelijk aan (32). Voor continu veranderlijke u heeft deze functie een maximum voor $u=\frac{1}{3}(n+r-\frac{1}{2}) \geq n-r-\frac{1}{6}$. Voor gehele u met $n-s \leq u \leq n-r$ wordt (32) dus maximaal voor $u=n-r$. Voor $n-r \leq u \leq [\frac{1}{2}n]$ wordt (29):

(34) $-2u^2+(2n-1)u+\frac{1}{2}(n-r)(3r-n+1)+\frac{1}{2}r(r+1)+\frac{1}{2}(n-s)(3s-n+1)+\frac{1}{2}s(s+1)$.

Voor continu veranderlijke u heeft deze functie een maximum voor $u=\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}$. Daar $[\frac{1}{2}n]=\frac{1}{2}n$ of $\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$, wordt (34) voor gehele u met $n-r \leq u \leq [\frac{1}{2}n]$ maximaal als $u=[\frac{1}{2}n]$. Verder geldt voor $u=n-s$, dat (30)=(32) en voor $u=n-r$, dat (32)=(34). Voor gehele u met $0 \leq u \leq [\frac{1}{2}n]$ wordt (29) dus maximaal voor $u=[\frac{1}{2}n]$. De maximale waarde wordt gevonden door $u=\frac{1}{2}n$ of $u=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$ (hetgeen op hetzelfde neerkomt) in (34) te substitueren; dit levert echter weer (33). Voor de waarde van het maximum behoeven dus slechts de gevallen $r+s \leq n$ en $r+s \geq n$ onderscheiden te worden.

Op grond van de symmetrie in r en s van uitgangsformule en van resultaat geeft $r \geq s$ dezelfde uitkomst. We hebben dus voor het maximum van (29) gevonden:

$$(35) \quad \begin{cases} (r+s)n+rs-\frac{1}{2}r(r-1)-\frac{1}{2}s(s-1) & \text{als } r+s \leq n \ , \\ -\frac{1}{2}n^2+(2r+2s+\frac{1}{2})n-r^2-s^2 & \text{als } r+s \geq n \ . \end{cases}$$

We merken nog op dat dit maximum in alle gevallen voor de grootste toegelaten waarde van u bereikt wordt.

Maken we nu ten slotte A,C en D veranderlijk, dusdanig dat A+iD rang r en C+D rang s heeft en kiezen we de rang van D zo groot mogelijk, dan blijft deze rang bij kleine variatie constant. Immers bij kleine variatie van een matrix kan de rang nooit dalen; in dit geval kan de rang ook niet stijgen omdat deze maximaal is. Verder is het op grond van het voorafgaande duidelijk, dat deze keuze het grootste aantal parameters oplevert, dat gegeven wordt door (35).

Om het resultaat van de stelling te krijgen moet ook nog de variatie in B worden verrekend; door bij (35) echter $\frac{1}{2}n(n-1)$ op te tellen, krijgen we juist de formules van onze stelling, die daarmee bewezen is.

Literatuur

1. J.H.M. Wedderburn, Lectures on matrices, Amer.Math.Soc.Coll.Publ. 17 (1934).