STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 010

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

M.A. Maurice

27 oktober 1962

Over gewicht en dichtheid van topologische ruimten

1962

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.),by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZW 1962-010

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie "Actualiteiten" door

M.A. Maurice

27 oktober 1962

Over gewicht en dichtheid van topologische ruimten

1. Zij X een topologische ruimte.
   Onder de dichtheid van X verstaat men

$$\rho(X) = \min \{\lambda \mid \exists N \subset X : \overline{N} = X, |N| = \lambda\}$$

Onder het gewicht van X verstaat men

$$w(X) = \min \{\tau \mid \exists \text{ basis } B \text{ voor } X \text{ met } |B| = \tau\}.$$

Opm: In het volgende wordt ondersteld dat $\rho(X) \geq \aleph_0$ en $w(X) \geq \aleph_0$.

2. Stelling 1: a. $\rho(X) \leq w(X)$
   b. Als X volledig reguliere T_1-ruimte is, is $w(X) \leq 2^{\rho(X)}$

Bewijs: a. evident

b. Indien N dicht ligt in X, is een continue reële functie f op X geheel bepaald door $f|N$.
Kies nu $N \subset X$ zodanig dat $\overline{N} = X$ en $|N| = \rho(X)$;
dan geldt blijkbaar voor de verzameling F van alle continue reële functies f, die gedefinieerd zijn op X, en waarvoor $f[X] \subset \langle 0,1 \rangle$, dat

$$|F| = \mathfrak{c}^{\rho(X)} = 2^{\rho(X)}.$$

Voorts is bij elke $x \in X$ en iedere open O met $x \in O$ een $f \in F$ te vinden, zodat $f(x) = 0$ en $f(y) = 1$ voor $y \in X \setminus O$, hetgeen inhoudt, dat $x \in f^{-1}[\langle 0, \frac{1}{2})] \subset O$;

dit betekent, dat $\left\{ f^{-1}[\langle 0,\frac{1}{2})] \right\}_{f \in F}$ een basis is voor X.

Derhalve is $w(X) \leq |F| = 2^{\rho(X)}$.

<u>Stelling 2</u> a. Als X Hausdorffruimte is, is $|X| \leq 2^{w(X)}$

b. Als X compacte Hausdorffruimte is, is $w(X) \leq |X|$.

<u>Bewijs</u>: a. Als B een basis is voor X, en I(x) is de verzameling van alle $O \in B$ zó dat $x \in O$, dan is blijkbaar

$$\bigcap_{O \in I(x)} O = \{x\} .$$

Dan is $x \to I(x)$ een injectie van X in $\mathcal{P}(B)$, zodat

$$|X| \leq 2^{|B|} .$$

Derhalve $|X| \leq 2^{w(X)}$.

b. Voeg aan elk tweetal punten $p,q \in X$ disjuncte open omgevingen toe:

$$p \in O_{pq}, \quad q \in O_{qp} , \quad O_{pq} \cap O_{qp} = \emptyset .$$

Zij B de familie van alle eindige doorsneden van verzamelingen O_{pq}. Dan is B een basis voor X; is immers O een open verzameling in X, en is $p \in O$, dan is $\{O_{qp}\}_{q \in X \setminus O}$ een open overdekking van $X \setminus O$, die, omdat $X \setminus O$ gesloten en dus compact is, een eindige deeloverdekking $\{O_{qp}\}_{q=q_1,q_2,\ldots,q_n}$ heeft; maar dan is enerzijds

$$\bigcap_{i=1}^{n} O_{pq_i} \in B$$

en anderzijds

$$p \in \bigcap_{i=1}^{n} O_{pq_i} \subset O .$$

Daar voorts $|B| = |X|$, volgt $w(X) \leq |X|$.

3. Zij μ een ordinaalgetal.

De verzameling

$$\{0,1\}^{\mu} = \{ x \mid x=(x_i)_{i<\mu} , \; x_i = 0 \text{ of } 1 \}$$

wordt lineair geordend door de afspraak

$$(x_i)_{i<\mu} < (y_i)_{i<\mu} \quad ,$$

dan en slechts dan, indien voor de eerste i, zeg i_o, waarvoor $x_i \neq y_i$, geldt $x_{i_o} < y_{i_o}$ (dus $x_{i_o}=0$, $y_{i_o}=1$).

Van nu af wordt onder $\{0,1\}^\mu$ de topologische ruimte (verz. $\{0,1\}^\mu$, orde-topologie) verstaan.

Het is duidelijk, dat $\{0,1\}^\mu$ een Hausdorffruimte is.

Opm: $\{0,1\}^\omega$ is homeomorf met het Cantor discontinuum.

Stelling 3: $X=\{0,1\}^\mu$ is compact.

Bewijs:

1. We bewijzen eerst, dat X volledig is (t.o.v. de ordening) Zij $A \subset X$; definieer $b=(b_i)_{i<\mu}$ door transfiniete inductie als volgt

$$\begin{cases} b_1=0, \text{ als voor alle } a=(a_i)_{i<\mu} \in A \text{ geldt } a_1=0 \\ b_1=1 \text{ in het andere geval;} \end{cases}$$

als b_i gedefinieerd is voor alle $i<v$, zij dan

$$\begin{cases} b_v=0, \text{ als voor alle } a=(a_i)_{i<\mu} \in A, \text{ met } a_i=b_i \text{ voor } \\ \qquad\qquad i<v, \text{ geldt } a_v=0 \\ b_v=1 \text{ in het andere geval.} \end{cases}$$

Het is duidelijk, dat b=sup A.

2. Nu volgt gemakkelijk uit de subbasisstelling van Alexander, dat X compact is (vgl. opgave C uit Hfdst. V van Kelley: General Topology).

Stelling 4: $X=\{0,1\}^\mu$ is 0-dimensionaal.

Bewijs:

Kies $a=(a_i)_{i<\mu} \in A$ en $b=(b_i)_{i<\mu} \in A$.

Zij $a<b$ en laat i_o de eerste index zijn, waarvoor $a_i \neq b_i$ (dan is dus $a_{i_o}=0$, $b_{i_o}=1$);

definieer $p=(p_i)_{i<\mu}$ door $\begin{cases} p_i=a_i=b_i & \text{voor } i<i_o \\ p_{i_o}=0 & \\ p_i=1 & \text{voor } i>i_o \end{cases}$

en $q=(q_i)_{i<\mu}$ door $\begin{cases} q_i=a_i=b_i & \text{voor } i<i_o \\ q_{i_o}=1 & \\ q_i=0 & \text{voor } i>i_o \end{cases}$;

dan is $a \leq p < q \leq b$ en $\{x \mid p<x<q\} = \emptyset$.
Hieruit volgt gemakkelijk dat X totaal onsamenhangend, dus 0-dimensionaal is.

4. Laat $\mu(\alpha)$ het eerste ordinaalgetal zijn van de getalklasse, waarvan α het kardinaalgetal is.

<u>Stelling 5</u>: Zij $\lambda = \lambda(\alpha)$.

a. $\rho(\{0,1\}^{\lambda}) = \rho(\{0,1\}^{\lambda+1}) = \alpha$

b. $\rho(\{0,1\}^{\mu}) \geq 2^{\alpha}$ voor $\mu \geq \lambda+2$.

<u>Bewijs</u>: <u>Opmerking</u>: bij het bewijs van <u>a</u>. wordt de continuumhypothese gebruikt.

<u>a</u>. Het is duidelijk, dat de verzameling

$$A=\{x \mid x=(x_i)_{i<\lambda},\ x_i=0 \text{ of } 1,\ \exists i_o<\lambda : x_i=0 \text{ voor } i \geq i_o\}$$

dicht ligt in $\{0,1\}^{\lambda}$.

Voorts volgt uit

$$\alpha(i_o) \overset{d}{=\!=} |\{i \mid i<i_o\}| < \alpha$$

en de continuumhypothese, dat

$$2^{\alpha(i_o)} \leq \alpha.$$

Dus is

$$|\{x \mid x_i=0 \text{ voor } i \geq i_o\}| \leq 2^{\alpha(i_o)} \leq \alpha,$$

en derhalve is, daar

$$A = \bigcup_{i_o<\lambda} \{x \mid x_i=0 \text{ voor } i \geq i_o\}$$

ook

$$|A| \leq \alpha.\alpha = \alpha; \quad |A| = \alpha$$

Daar de dichtheid van $\{0,1\}^{\lambda}$ zeker niet kleiner is dan α, volgt

$$\rho(\{0,1\}^{\lambda}) = \alpha.$$

Op analoge wijze toont men aan

$$\rho(\{0,1\}^{\lambda+1}) = \alpha.$$

b. Definieer

$$p_1(a)=p_1((a_i)_{i<\lambda})=(p_i)_{i<\mu} \text{ door } \begin{cases} p_i=a_i & \text{voor } i<\lambda \\ p_\lambda=p_{\lambda+1}=0 & \\ p_i=1 & \text{voor } i>\lambda+1 \end{cases}$$

$$p_2(a)=p_2((a_i)_{i<\lambda})=(p_i)_{i<\mu} \text{ door } \begin{cases} p_i=a_i & \text{voor } i<\lambda \\ p_\lambda=p_{\lambda+1}=1 & \\ p_i=0 & \text{voor } i>\lambda+1 \end{cases}$$

Dan bestaan er in $\{0,1\}^{\mu}$ blijkbaar 2^{α} disjuncte, open, niet-lege intervallen

$$\{x \mid p_1(a) < x < p_2(a)\} .$$

Derhalve is $\rho(\{0,1\}^{\mu}) \geqq 2^{\alpha}$.

5. Zij $\lambda = \lambda(\alpha)$, en $X = \{0,1\}^{\lambda+2}$
Dan is $\rho(X)=2^{\alpha} = |X|$.
Op grond van St.1 en St.2 is

$$\rho(X) \leqq w(X) \leqq |X| ,$$

en dus ook

$$w(X)= |X| .$$

6. <u>Stelling</u> 6: Zij $X= \prod_{a \in A} X_a$ (topologisch product).

Dan is

$$w(X) \leqq \alpha$$

dan en slechts dan als

1) $w(X_a) \leqq \alpha$ voor alle $a \in A$

2) $|\{a \mid a \in A \text{ en } X_a \text{ niet indiscreet}\}| \leqq \alpha$.

Bewijs: Als opgave M uit Hfdst.III van Kelley: General Topology.

Stelling 7: a. Indien $|B| \leq 2^{\mathfrak{a}}$, en $\rho(X_b) \leq \mathfrak{a}$ voor alle $b \in B$, dan geldt ook

$$\rho\Big(\prod_{b \in B} X_b\Big) \leq \mathfrak{a}$$

b. Indien $|A| > 2^{\mathfrak{a}}$, en indien X_a een volledig reguliere T_1-ruimte is voor elke $a \in X_a$, dan is

$$\rho\Big(\prod_{a \in A} X_a\Big) > \mathfrak{a}$$

Bewijs:

a. Zij $\alpha = \alpha(\mathfrak{a})$;

z.b.d.a. zij $B = \{0,1\}^{\alpha}$.

Laat voorts $A(\subset B)$ gedefinieerd zijn door

$$A = \{\, x \mid x = (x_i)_{i<\alpha} \;;\; \exists\, i_0 < \alpha : x_i = 0 \text{ voor } i \geq i_0 \,\}$$

(i) Indien M welgeordend is met ordinaalgetal α, laat dan voor alle $b \in B$ de verzameling

$$N_b = \{\, n_b^{(m)} \,\}_{m \in M}$$

dicht liggen in X_b.

(ii) Definieer Z door

$$Z = \left\{ f = (f_b)_{b \in B} \;\middle|\; \exists\, a_1,\ldots,a_s \in A : \exists\, m_0,\ldots,m_s \in M : a_1 < a_2 < \ldots < a_s \text{ en } \begin{cases} f_b = n_b^{(m_0)} & \text{voor } b < a_1 \\ f_b = n_b^{(m_i)} & \text{voor } a_i \leq b < a_{i+1} \\ & (i = 1,2,\ldots,s-1) \\ f_b = n_b^{(m_s)} & \text{voor } a_s \leq b \end{cases} \right\}$$

(iii) Het is duidelijk, dat $|Z| = \mathfrak{a}$

(iv) Z ligt bovendien dicht in $X = \prod_{b \in B} X_b$.

Immers: als U open is in X kunnen we z.b.d.a. schrijven

$$U = \prod_{b \in B} U_b \quad ,$$

waarin U_b open is in X_b, terwijl slechts eindig vele $U_b \neq X_b$ zijn; bijv. alleen $U_{b_i} \neq X_{b_i}$ voor $i = 1,2,\ldots,k$.

Voor alle $i = 1,2,\ldots,k$ bestaat nu een

$$n_{b_i}^{(m(b_i))} \in U_{b_i} \quad .$$

Kies dan $a_i \in A$ $(i=1,2,\ldots,k-1)$ zo dat

$$b_1 < a_1 \leq b_2 < a_2 \leq \ldots < a_{k-1} \leq b_k \quad ,$$

en definieer $z=(z_b)_{b \in B}$ door

$$\begin{cases} z_b = n_b^{m(b_1)} & \text{voor } b < a_1 \\ z_b = n_b^{(m(b_{i+1}))} & \text{voor } a_i \leq b < a_{i+1} \quad (i=1,2,\ldots,k-2) \\ z_b = n_b^{(m(b_k))} & \text{voor } a_{k-1} \leq b \end{cases}$$

dan is $z \in Z \cap U$.

2. Indien $X = \prod_{a \in A} X_a$, dan is op grond van stelling 6

$$w(X) > 2^{\lambda} \quad ,$$

en dus op grond van stelling 1

$$2^{\rho(X)} > 2^{\lambda} \quad ,$$

en dus $\rho(X) > \lambda$ (continuumhypothese).