STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963 -010

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

26 oktober 1963

P.C. Baayen

Topologische halflichamen

1963

ZW 1963-010

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

op 26 oktober 1963 door

P.C. Baayen

Topologische halflichamen

Deze voordracht is gewijd aan een recent boek van M.Ja. Antonovskij, V.G. Boltjanskij en T.A. Sarynsakov [2] , en aan een drietal artikelen van deze auteurs (waarvan één gemeenschappelijk met I.M. Dektjarev), [1] , [3] en [4] .

De term "halflichaam" is reeds geruime tijd in gebruik; zie e.g. [5] . In publicaties als deze is een halflichaam een algebraïsch systeem A, waarin gedefinieerd zijn twee binaire operaties +, ., die aan bijna alle axioma's voor een lichaam voldoen: de enige voorwaarde die niet vervuld behoeft te zijn is het bestaan van een inverse operatie voor +. M.a.w. de vergelijking $a+x=b$ behoeft niet altijd een oplossing te bezitten.

In deze voordracht zijn we geïnteresseerd in een geheel afwijkend begrip halflichaam, voor het eerst gedefinieerd in [2] . Dit begrip is het beste te benaderen via een beschouwing van de directe som van lichamen.

Zij R het lichaam der reële getallen. Daar R een ring is, is ook de directe som $R^2 = R \oplus R$ een ring; maar, zoals altijd het geval is met de directe som van lichamen, R^2 is geen lichaam: er zijn nl. nuldelers. E.g.:

$$(0,a) \, . \, (b,0) = 0$$

(het nulelement (0,0) van R^2 geven we weer aan met 0).

Toch is R^2 niet zomaar een ring. Al hebben de elementen van de vorm (0,a) of (b,0) geen inverse, "de meeste" elementen hebben er wel een: als $a\neq 0$, $b\neq 0$, dan bestaat $(a,b)^{-1}$, en

$$(a,b)^{-1} = (a^{-1},b^{-1}).$$

Identificeren we R^2 met het platte vlak, dan zijn dus alleen de punten op de coördinaatassen singulier; de punten in de open quadranten zijn inverteerbaar.

We merken ook op dat R^2 van R een natuurlijke partiële ordening meekrijgt:

$$(a,b) > (c,d) \Longleftrightarrow a > c \text{ en } b > d.$$

Ieder positief element (a,b) (d.w.z. iedere $(a,b) > 0$) is inverteerbaar, en evenzo ieder negatief element $(a,b) < 0$ (vgl. de situatie in R).

Algemener, zij Δ een willekeurige verzameling; dan schrijven we R voor de ring van alle functies $f : \Delta \to R$, met +,. gedefinieerd door

$$(f_1+f_2)(\delta) = f_1(\delta)+f_2(\delta);$$
$$(f_1.f_2)(\delta) = f_1(\delta).f_2(\delta).$$

Dan komt R^Δ overeen met de directe som van evenveel copieën van R als er punten in Δ zijn. We kunnen R^Δ weer partieel ordenen door te stellen

$$f_1 > f_2 \Longleftrightarrow f_1(\delta) > f_2(\delta) \text{ voor alle } x \in \Delta.$$

Zij K de verzameling van alle $f \in R^\Delta$ met $f > 0$ (als $\Delta = \{1,2\}$ is K dus het open eerste quadrant in het vlak R^2). Dan is ieder element van K inverteerbaar (er zijn natuurlijk nog veel meer elementen met die eigenschap). Daar kennelijk $K-K = R^\Delta$ (anders gezegd, iedere $f \in R^\Delta$ is te schrijven als verschil van twee positieve functies) is dus ieder element van de ring R^Δ verschil van twee inverteerbare elementen.

Men kan in R^Δ op natuurlijke wijze een topologie invoeren: de producttopologie (zwakke topologie). Het is gemakkelijk na te gaan dat dan de volgende uitspraken juist zijn:

1. $K+\overline{K}\subset K$, $K.K\subset K$;
2. $K-K = R^{\Delta}$;
3. Zij $M\subset \overline{K}$ en $N =\{ \overline{K}+x : x\in M\}$; dan is òf $N=\emptyset$, òf $N=\overline{K}+y$ voor zekere $y \in \overline{K}$;
4. voor willekeurige $a,b\in K$ heeft de vergelijking $ax=b$ altijd een oplossing;
5. $\overline{K}\cap -\overline{K} =\{ 0\}$;
6. voor $a\in R^{\Delta}$ zij $F_a =\{ x\in R^{\Delta} : ax\in \overline{K}\}$; de verzamelingen b+Fa, met $a,b\in R^{\Delta}$, vormen een subbasis voor de gesloten verzamelingen in R^{Δ} .

<u>Definitie</u> (zie [2]). Een topologisch halflichaam is een topologische ring E met tenminste twee elementen, waarin een deelverzameling K gedefinieerd is die de bovengenoemde eigenschappen 1 t/m 6 bezit (met overal R^{Δ} vervangen door E).

In een topologisch halflichaam in de zin van [2] is dus de optelling <u>wel</u> altijd gedefinieerd. Men zou deze topologische halflichamen kunnen beschouwen als curieusiteiten uit de theorie der topologische ringen, ware het niet dat de ontwerpers ervan een aantal aantrekkelijke toepassingen hebben weten aan te geven (terwijl ze nog aantrekkelijker toepassingen in het vooruitzicht stellen).

Op die toepassingen komen we terug aan het eind van deze voordracht; nu vermelden we eerst een aantal consequenties van de definitie. Daarbij voeren we de volgende notatie in:

$$a < b \Longleftrightarrow b-a\in K;$$
$$a \prec b \Longleftrightarrow b-a\in \overline{K}.$$

Uit de axioma's 1,2,4 en 5 kan men gemakkelijk afleiden: $0\notin K$; de ring E heeft een eenheid 1, en $1\in K$; iedere $a>0$ heeft een ondubbelzinnig bepaalde inverse a^{-1}, en $a^{-1}\in K$. De relaties $\preccurlyeq$ en $\succcurlyeq$ ($a\succcurlyeq b \Leftrightarrow a \quad b$ of $a=b$) zijn partiële ordeningen in E, en uit

$$0\prec a\prec b,\quad 0\prec c\prec d$$

volgt

$$ac\prec bd\ .$$

Voor willekeurige $a,b \in K$ bestaat er een $r > 0$ zodanig dat tegelijkertijd $ra > 1$ en $rb > 1$. Tenslotte: iedere eindige verzameling is begrensd (zowel t.o.v. $\succcurlyeq$ als t.o.v. $\geqslant$).

Axioma 3 blijkt gelijkwaardig te zijn met de volgende stelling:

<u>Stelling</u>. In $(E, \succcurlyeq)$ gelden de stellingen van de bovenste grens en van de onderste grens (dus: voor iedere naar boven begrensde verzameling M bestaat inf M).

I.h.b. bezit dus iedere eindige verzameling een infinum en een supremum. We definiëren, voor willekeurige $x \in E$:

$$x_+ = \sup(x,0)\,; \quad x_- = \sup(-x,0)\,;$$

$$|x| = x_+ + x_- \,.$$

Er geldt: $x = x_+ - x_-$, en deze decompositie is <u>minimaal</u>, in dien zin dat $x=y-z$ impliceert $y \succcurlyeq x_+$, $z \succcurlyeq x_-$. Voorts is $x_+ . x_- = 0$; $x^2 = |x|^2 \succcurlyeq 0$; terwijl ook:

$$|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$$

$$|x+y| \preccurlyeq |x| + |y| \,;$$

$$|x.y| = |x| \,.\, |y| \,.$$

Een belangrijke eigenschap is ook: $x \in E$ is dan en slechts dan inverteerbaar indien $|x| > 0$. Deze eigenschap stelt ons nl. in staat K te reconstrueren uit E en $\bar{K}$: K bestaat precies uit alle elementen van $\bar{K}$ die inverteerbaar zijn in E.

Een diepere analyse van de structuur van topologische halflichamen berust op de studie van <u>idempotente elementen</u>, i.e. van elementen x met

$$x^2 = x.$$

Iedere idempotente e voldoet aan $0 \preccurlyeq e \preccurlyeq 1$. Als $e \neq 0$, en voor iedere idempotente e' met $0 \preccurlyeq e' \preccurlyeq e$ geldt: $e' = 0$ of $e' = e$, dan heet e een <u>irreducibel</u> idempotent element. De verzameling van alle irreducibele idempotente elementen wordt aangegeven met Δ .

Voor iedere $e \in \Delta$ blijkt het ideaal eE van E isomorph te zijn met het lichaam R der reële getallen. Dit maakt het mogelijk een isomorphe afbeelding φ te construeren van E in R^{Δ}.

Bij al onze beschouwingen tot nu toe heeft axioma 6 geen rol gespeeld. Als we nu ook met dit axioma rekening gaan houden, blijkt: Δ ligt discreet in E; iedere eE, $e \in \Delta$, is topologisch isomorph met R; en de geconstrueerde isomorphie $\varphi : E \to R^{\Delta}$ is een topologische inbedding. De volgende representatiestelling geldt dus:

Stelling [2] . Ieder topologisch halflichaam is topologisch isomorph met een deelhalflichaam van een R^{Δ}.

In [3] wordt deze representatiestelling nog wat verscherpt, waarbij gebruik gemaakt wordt van het begrip raam (geraamte). Een raam over een verzameling Δ is een deelverzameling Σ van de gesloten positieve kegel (vgl. beneden) $\overline{K}_{\Delta}$ in R met de volgende twee eigenschappen:

a) Σ bevat een $s \succcurlyeq 1$;

b) $x, y \in \Sigma \Rightarrow \exists s_1, s_2 \in \Sigma$ met $s_1 \succcurlyeq x+y$, $s_2 \succcurlyeq x.y$.

Stelling [3] . Zij Δ een willekeurige niet-lege verzameling, Σ een raam over Δ. Dan is

$$E_{\Sigma} = \left\{ x \in R^{\Delta} : |x| \preccurlyeq s \text{ voor een } s \in \Sigma \right\} .$$

een deelhalflichaam van R^{Δ}, met

$$K_{\Sigma} = \left\{ x \in K_{\Delta} : x \in E_{\Sigma} \text{ en } x^{-1} \in E_{\Sigma} \right\}$$

als verzameling der elementen > 0. Omgekeerd kan ieder topologisch halflichaam op deze wijze verkregen worden.

Voorbeelden.

1. Σ zij de verzameling van alle positieve constante functies op Δ. Dan bestaat E_{Σ} uit alle begrensde functies, K_{Σ} uit alle positieve begrensde functies met positieve benedengrens.

2. Δ zij de verzameling der natuurlijke getallen; Σ de verzameling van alle rijen van de vorm $x_n = a.e^{b_n}$, met $a > 0$, $b > 0$. Dan bestaat E_Σ uit alle rijen die niet sneller dan exponentieel groeien, en K_Σ uit alle rijen $\{x_n\}$ waarvoor $a > 0$, $b > 0, \mu, \nu$ bestaan met

$$ae^{\mu n} < x_n < be^{\nu n} \quad , \quad n=1,2,\ldots$$

We merken ook nog op dat de doorsnede van alle deelhalflichamen van E die 1 bevatten, topologisch isomorph is met R. Deze doorsnede zullen we aangeven met D; in [2] heet hij de <u>as</u> van E.

Men kan E opvatten als topologische vectorruimte over D, en dus ook over R. De verzameling $\bar{K}$ is dan een convexe kegel in E (K is convex, maar geen kegel; $K \cup \{0\}$ is weer wel een convexe kegel).

TOEPASSINGEN

A. <u>Volledig reguliere ruimten</u>

Een gegeneraliseerde metrische ruimte over een topologisch halflichaam E is een verzameling X, tezamen met een functie $\rho : X \times X \rightarrow E$ die voldoet aan:

$$\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x=y;$$

$$\rho(x,y) = \rho(y,x);$$

$$\rho(x,y) + \rho(y,z) \leftarrow \rho(x,z) \quad .$$

Notatie: (X,ρ,E).

<u>Stelling</u> [3]. Zij (X,ρ,E) een gegeneraliseerde metrische ruimte. Voor $V \subset E$ zij

$$V^* = \{(x,y) \ : \ x \in X, y \in X, \ \rho(x,y) \in V\} .$$

De verzameling van alle V^* waar V alle omgevingen van 0 in E doorloopt vormen een uniforme structuur in X. Omgekeerd kan iedere uniforme structuur in een verzameling X verkregen worden d.m.v. een gegeneraliseerde metriek over een geschikt topologisch halflichaam E (i.h.a. op meer dan één manier).

Bijgevolg kan men de theorie der volledig reguliere ruimten en de theorie der uniforme structuren kleden in een "metrisch" gewaad. Dit is niet alleen amusant; op deze wijze kan men ook tot (soms nieuwe) resultaten komen.

Opmerking. Men kan E beschouwen als gegeneraliseerde metrische ruimte over zichzelf. Er geldt dan: E is dan en slechts dan *volledig* als E topologisch isomorph is met een R^{Δ}.

B. *Topologische groepen*

Iedere topologische groep is volledig regulier. Het volgende resultaat (zie [3]) is dus, gezien A, niet verwonderlijk:

Stelling. Iedere topologische groep G bezit een *invariante* gegeneraliseerde metriek.

(*Invariant* betekent: $\rho(ax,ay) = \rho(x,y)$ voor alle $a,x,y \in G$).

C. *Locaal convexe lineaire ruimten*

Zij X een reële vectorruimte en E een topologisch halflichaam. Een gegeneraliseerde norm in X over E is een afbeelding $\| \ \| : X \to E$ met de eigenschappen: voor alle $x,y \in X$ is

$$\|x\| \succcurlyeq 0;$$
$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x=0;$$
$$\|x+y\| \preccurlyeq \|x\| + \|y\|;$$
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \,.\, \|x\|.$$

(De laatste voorwaarde is zinvol als we R identificeren met de as D van E.)

Iedere gegeneraliseerde norm induceert een gegeneraliseerde metriek ρ: $\rho(x,y) = \|x-y\|$, en dus een topologie in X. In [2] wordt aangetoond dat X met deze topologie een locaal convexe topologische vectorruimte is; omgekeerd kan iedere locaal convexe topologische vectorruimte genormeerd worden d.m.v. een gegeneraliseerde norm over een geschikt topologisch halflichaam E.

Het artikel [1] van Antonovskij bevat o.a. een beschrijving van een begrip "sterk volledig" dat overeenkomt met Pták's "B-volledigheid", en een stelling die Pták's generalisatie van de "Open operator" stelling van Banach onmiddellijk impliceert. Een bewijs ontbreekt echter.

Literatuur

[1] M.Ja. Antonovskij, Metricheskie prostranstva nad polupoljami. In: General topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra. (Proceedings of the Symposium held in Prague in September, 1961), Praag, 1962.

[2] M.Ja. Antonovskij, V.G. Boltjanskij en T.A. Sarymsakov, Topologicheskie polupolja. Tashkent, 1960.

[3] V.G. Boltjanskij, Topologicheskie polupolja i ich primenenija. In: General topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proceedings of the Symposium held in Prague in September, 1961), Praag, 1962.

[4] T.A. Sarymsakov, M.Ja. Antonovskij en I.M. Dektjarev, Obobshchennye metricheskie prostranstva. Dokladi Akad. Nauk Uzbek. SSR 5 (1959), 3-7.

[5] H.J. Weinert, Ueber Halbringe und Halbkörper I. Acta Math. Acad. Scient. Hung. 13 (1962), 365-377.