STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1965 - 010

Eindig voortgebrachte commutatieve halfgroepen

door

A.B. Paalman - de Miranda

Definitie: Een verzameling elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ van een commutatieve topologische halfgroep S heet een stel voortbrengenden van S als de verzameling $\{a_{j_1}^{n_1} \ldots a_{j_k}^{n_k}\}$, $j_i = 1, \ldots, n$, $n_i = 1, 2, \ldots$ overal dicht ligt in S.

S heet monothetisch als S door één element a wordt voortgebracht, dus als $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ dicht ligt in S.
Een topologische groep G heet monothetisch als er een element $g \in G$ is, zo dat $\{g^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dicht ligt in G. In het compacte geval vallen deze twee begrippen samen. Immers dan is $\overline{\{g^n\}_{n=1}^{\infty}}$ een compacte deelhalfgroep van G en dus een ondergroep van G.
Hieruit volgt dat $\{g^n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \overline{\{g^n\}_{n=1}^{\infty}} \Rightarrow \overline{\{g^n\}_{n=1}^{\infty}} = G$.
Iedere monothetische halfgroep S is blijkbaar commutatief.
Zij nu S een willekeurige compacte halfgroep en stel $a \in S$. (Met $\Gamma(a)$ zullen wij de afsluiting van de verzameling $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ in S aangeven.
Men kan bewijzen dat de compacte halfgroep $\Gamma(a)$ precies één idempotent element e bevat en dat de verzameling limietpunten van de rij $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ een groep $H(e)$ vormt.

$H(e)$ is de grootste ondergroep van $\Gamma(a)$ die e omvat en $H(e) = \Gamma(a).e$. Verder is $H(e)$ een compacte monothetische groep met voortbrengende ae. $H(e)$ is tevens de kern van de halfgroep $\Gamma(a)$.

<u>Stelling 1</u>. Zij S een compacte commutatieve halfgroep voortgebracht door n elementen. Dan heeft S hoogstens 2^n-1 idempotente elementen.

<u>Bewijs</u>:
Stel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de voortbrengenden van S.
Daar $\Gamma(a_1) \cup \Gamma(a_2) \cup \ldots \cup \Gamma(a_n) \cup \Gamma(a_1)\Gamma(a_2) \cup \ldots \cup \Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\ldots\Gamma(a_n)$ een compact deel is van S, dat alle machten $a_{j_1}^{n_1} \ldots a_{j_k}^{n_k}$ bevat, is $S = \bigcup \Gamma(a_{j_1})\ldots\Gamma(a_{j_k})$.
S is dus de vereniging van 2^n-1 compacte deelhalfgroepen.
Wij bewijzen nu dat elk van deze halfgroepen precies één idempotent element bevat.
Stel $e_i \in \Gamma(a_i)$ $i=1,\ldots,n$ en f een willekeurig idempotent element uit $\Gamma(a_{j_1})\ldots\Gamma(a_{j_k})$. Dan is f te schrijven als $f = b_{j_1}\ldots b_{j_k}$ met $b_{j_i} \in \Gamma(a_{j_i})$ $(i=1,\ldots,k)$. Tevens geldt daar $f^r=f$, $r=1,2,\ldots,$ dat $f = b_{j_1}^r b_{j_2}^r \ldots b_{j_k}^r \Rightarrow f \in b_{j_1}^r \Gamma(a_{j_2})\ldots\Gamma(a_{j_k})$, $r=1,2,\ldots$.
Daar $\Gamma(b_{j_1}) \subset \Gamma(a_{j_1})$ geldt dat $e_{j_1} \in \Gamma(b_{j_1})$ en dus is e_{j_1} limietpunt van de rij $\{b_{j_1}^r\}_{r=1}^{\infty}$. Uit de continuiteit van de vermenigvuldiging en de compactheid van $\Gamma(a_{j_2})\ldots\Gamma(a_{j_k})$ volgt dat $f \in e_{j_1}\Gamma(a_{j_2})\ldots\Gamma(a_{j_k})$.
Dus $fe_{j_1} = f$.
Op dezelfde wijze bewijst men dat $fe_{j_i} = f$, $i=2,\ldots,k$ en dus dat $f(e_{j_1}\ldots e_{j_k}) = f$.
Aan de andere kant heeft men $f(e_{j_1}\ldots e_{j_k}) = (b_{j_1}e_{j_1})\ldots(b_{j_k}e_{j_k}) \in H(e_{j_1})\ldots H(e_{j_k})$. Daar $H(e_{j_1})\ldots H(e_{j_k})$ bevat is in de maximale ondergroep van S die het idempotent element $e_{j_1}\ldots e_{j_k}$ omvat en $f(e_{j_1}\ldots e_{j_k})$ een idempotent element is, volgt hieruit dat $f = f(e_{j_1}\ldots e_{j_k}) = e_{j_1}\ldots e_{j_k}$. De halfgroep $\Gamma(a_{j_1})\ldots\Gamma(a_{j_k})$ heeft dus precies één idempotent element.

Gevolg: $\Gamma(a_{i_1})\Gamma(a_{i_2})\ldots\Gamma(a_{i_k}) \cap \Gamma(a_{j_1})\Gamma(a_{j_2})\ldots\Gamma(a_{j_r}) = \emptyset$, dan en slechts dan als $e_{i_1}\ldots e_{i_k} \neq e_{j_1}\ldots e_{j_r}$.

Bewijs:
Stel $b \in \Gamma(a_{i_1})\ldots\Gamma(a_{i_k}) \cap \Gamma(a_{j_1})\ldots\Gamma(a_{j_r})$.
Dan $\Gamma(b) \subset \Gamma(a_{i_1})\ldots\Gamma(a_{i_k}) \cap \Gamma(a_{j_1})\ldots\Gamma(a_{j_r})$.
Daar zowel $\Gamma(b)$ als $\Gamma(a_{i_1})\ldots\Gamma(a_{i_k})$ en $\Gamma(a_{j_1})\ldots\Gamma(a_{j_r})$ precies één idempotent element bevatten, geldt $e_{i_1}\ldots e_{i_k} = e_{j_1}\ldots e_{j_r}$.

Opmerking: Stelling 1 geldt niet als $n \geq \chi_0$. Stel bijv. $I = [0,1]$ met de gewone vermenigvuldiging van de reële getallen en laat I^I het directe product zijn van continu veel copieën van I. Dan bevat I^I, 2^c veel idempotente elementen.
I^I is separabel en bevat dus zeker een overal dichte deelhalfgroep met aftelbaar veel voortbrengenden.

Stelling 2. Zij S een compacte commutatieve halfgroep, voortgebracht door n elementen. Dan heeft S precies één idempotent element of S is een semilattice van compacte deelhalfgroepen met precies één idempotent, waarvan minstens één voortgebracht wordt door $m \leq n$ elementen.

Bewijs:
Stel $S_\alpha = \bigcup_{e_{j_1}\ldots e_{j_k}=e_\alpha} \Gamma(a_{j_1})\ldots\Gamma(a_{j_k})$. Dan is S_α een compacte deelhalfgroep van S. Immers als $e_{j_1}\ldots e_{j_k} = e_{i_1}\ldots e_{i_r} = e_\alpha$ en $x \in \Gamma(a_{j_1})\ldots\Gamma(a_{j_k})$, $y \in \Gamma(e_{i_1})\ldots\Gamma(e_{i_r})$ dan $e_\alpha \in \Gamma(x)$ en $e_\alpha \in \Gamma(y) \Rightarrow e_\alpha \in \Gamma(xy) \subset \Gamma(x)\Gamma(y)$.
Dus $xy \in \Gamma(a_{t_1})\ldots\Gamma(a_{t_l})$ met $e_{t_1}\ldots e_{t_l} = e_\alpha$.
Uit stelling 1 volgt tevens dat S_α precies één idempotent element bevat en dat $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$ als $e_\alpha \neq e_\beta$.
S_α is de verzameling van alle $x \in S$ met $e_\alpha \in \Gamma(x)$.
Laat nu de verzameling E van alle idempotenten $e_\alpha \in S$ geordend zijn door middel van $\leq$, waarbij $e_\alpha \leq e_\beta$ als $e_\alpha e_\beta = e_\alpha$. Het is duidelijk dat $\leq$ een partiële ordening is.

Definiëren wij nu $S_\alpha \leq S_\beta$ als $e_\alpha \leq e_\beta$, dan wordt S een semilattice van compacte deelhalfgroepen S_α.
Laat tenslotte e_α een maximaal idempotent uit E zijn. Dan is $e_\alpha = e_i \in \Gamma(a_i)$ voor minstens één voortbrengende a_i. Men gaat nu gemakkelijk na dat S_α dan voortgebracht wordt door de a_i met $e_i = e_\alpha$.

Stelling 3. Zij S een compacte commutatieve halfgroep voortgebracht door n elementen $a_1, \ldots, a_n$ en stel dat S precies één idempotent element bevat. Dan is de verzameling limietpunten van $\{a_{j_1}^{n_1} \ldots a_{j_k}^{n_k}\}$, $j_i = 1, \ldots, n$, $n_i = 1, \ldots$ een groep, die gelijk is aan de kern van S.

Bewijs:
Stel $e = e^2 \in S$ en $H_j(e)$ de kern van $\Gamma(a_j)$, $j=1,\ldots,n$.
Zij K de kern van S. Dan is, daar S maar één idempotent element e bevat, K gelijk aan de maximale ondergroep H(e) van S die e bevat.
Er geldt dus $H_1(e)H_2(e)\ldots H_n(e) \subset H(e) = K$.
Daar ieder element van S te schrijven is als $b_{j_1} \ldots b_{j_k}$ met $b_{j_i} \in \Gamma(a_{j_i})$ en $K = Se$, geldt voor willekeurige $x \in K$, $x = xe = b_{j_1} \ldots b_{j_k} e =$
$= (b_{j_1} e) \ldots (b_{j_k} e) \subset H_{j_1}(e) \ldots H_{j_k}(e) \subset H_1(e) \ldots H_n(e)$.
Dus $K = H_1(e) \ldots H_n(e)$.
Het is duidelijk dat ieder element $x \in H_1(e) \ldots H_n(e)$ limietpunt is van $\{a_{j_1}^{n_1}, \ldots, a_{j_k}^{n_k}\}$.
Zij nu omgekeerd y limietpunt van $\{a_{j_1}^{n_1} \ldots a_{j_k}^{n_2}\}$.
Dan bevat iedere omgeving van y punten $a_{j_1}^{n_1} \ldots a_{j_k}^{n_k}$ met bijv. willekeurig grote n_1. Hieruit volgt dan dat $y \in a_{j_1}^r S$, $r=1,2,\ldots$. Daar S compact is volgt hieruit $y \in eS = K$.
K is dus de verzameling limietpunten van $\{a_{j_1}^{n_1} \ldots a_{j_k}^{n_k}\}$.

Opmerking: Heeft S meer dan één idempotent element, dan is de verzameling limietpunten echt groter dan de kern K van S.

Is S een locaal compacte monothetische halfgroep met een kern K die niet leeg is, dan kan men bewijzen dat S compact is.
Deze stelling is niet meer juist als S door meer dan één element wordt voortgebracht. Zo is bijv. de groep van de gehele getallen Z een locaal compacte halfgroep voortgebracht door 3 elementen met kern K = Z.

Literatuur:

K. Numakura: On bicompact semigroups, Math. J. Okayama Univ. 1 (1952).
R.J. Koch : On monothetic semigroups, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957).
St. Schwarz: K teorii khausdorfovykh bikompaktnykh polugrupp, Czech. Math. J. 5 (1955).