STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-011

Gehele functies van het exponentiële type

"Actualiteiten"

J. Korevaar

1948

ZW 1948 - 011
(20 April)

Gehele functies van het exponentiële type.

(Voordracht in de serie "Actualiteiten", te houden op 24 April 1948,
door J. Korevaar).

Dit is geen overzicht van alles, wat er gepubliceerd is over het onderwerp. Dat is zeer veel. Zie bv. Carmichael 1934, Boas 1942 en de Mathematical Revieuws. Misschien heb ik later nog wel eens gelegenheid voor een overzicht.
Dit zijn een paar grepen. Ze verschijnen hier als toepassingen van de gemengd complexe-reële methoden van de school van Norbert Wiener.

2. L_2. Fourier-integralen.

Integralen zijn Lebesgue-integralen. We zeggen dat $f(x) \in L_2(a,b)$ als $f(x)$ meetbaar is, terwijl

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx$$

bestaat. In het vervolg wordt voor $L_2(-\infty,\infty)$ kortweg L_2 geschreven.

In L_2 wordt een metriek ingevoerd door de afstandsdefinitie

$$(f,g) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Definitie. $f(x) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, f_n(x)$

betekent $(f,f_n) \to 0, (n \to \infty)$.

Stelling van Weyl (Riesz-Fischer): als $f_n \in L_2$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

$$(f_n,f_m) \to 0, \quad (n,m \to \infty),$$

dan bestaat er een $f \in L_2$ zó dat

$$(f,f_n) \to 0, \ (n \to \infty).$$

Opmerking. Als $f_n \in L_2 (n = 1, 2, \ldots)$,

$$f = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, f_n, \qquad g = \lim_{n\to\infty} f_n,$$

dan is $(f,g) = 0$ ($f(x) - g(x)$ is bijna overal 0

Als $f \in L_2$ dan is $f(x) = \underset{\varepsilon\to 0}{\text{l.i.m.}}\, \frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} f(y)dy$

Stelling van Plancherel. Als $f(x) \in L_2$ dan bestaat er een $g(u) \in L_2$ zó, dat

$$g(u) = \underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x)e^{iux}dx.$$

(Fourier-getransformeerde van $f(x)$).

Dan is omgekeerd

$$f(x) = \underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} g(u)e^{-ixu}du.$$

Tenslotte is

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2du = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2dx.$$

Opmerking. Als

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iux}dx$$

bestaat, is $(g,h) = 0$.

Stelling van Parseval. Als $f_1(x) \in L_2$, $f_2(x) \in L_2$, als $g_1(u)$ en $g_2(u)$ de Fourier-getransformeerden zijn van $f_1(x)$ resp. $f_2(x)$, dan is

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(u)g_2(u)e^{-iyu}du = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(y-x)dx.$$

Literatuur: Titchmarsh 1937.

3. Phragmén-Lindelöf voor functies van het exponentiële type.

We beschouwen een functie $f(z)$, analytisch in een zich naar het oneindige uitstrekkend gebied G. Laat

$$M(r) = \underset{\substack{|z|=r \\ z\in G}}{\text{bov. gr.}} |f(z)| .$$

$f(z)$ heet van het exponentiële type α in G, als

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} = \alpha .$$

Als $f(z)$ van het exp. type is in G, bestaat er een A zó, dat

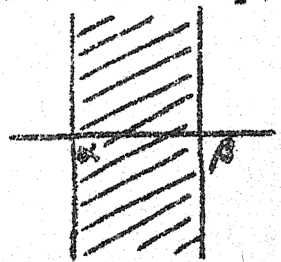
$$f(z) = O(e^{A|z|}) \quad \text{in } G.$$

a). Als $f(z)$ analytisch is in de strook $\alpha \leq x \leq \beta$ en aldaar van het exp. type, als verder

$$|f(\alpha + iy)| \leq K \quad , |f(\beta + iy)| \leq K,$$

dan is $$|f(x + iy)| \leq K \quad (\alpha \leq x \leq \beta).$$

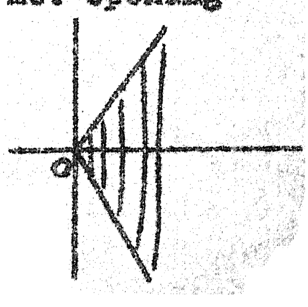
(Bewijs: beschouw $f(z)e^{\delta z^2}$, $\delta > 0$).



b) Als $f(z)$ analytisch is in, en op de rand van een hoek met opening $\varphi < \pi$, en aldaar van het exp. type, als verder

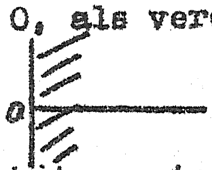
$$|f(z)| \leq K \text{ op de rand,}$$

dan is $$|f(z)| \leq K \text{ in de hoek.}$$



(Bewijs: beschouw een hoek symmetrisch t.o.v. de reële as met opening naar rechts en kijk naar $f(z)e^{-\delta z^{\beta}}$, waarin $\delta > 0$ en $\beta > 1$ zó, dat $\beta\varphi < \pi$).

c) Als $f(z)$ analytisch is voor $x \geqq 0$ en aldaar van het type 0, als verder



$$|f(iy)| \leqq K,$$

dan is
$$|f(z)| \leqq K, \qquad (x \geqq 0).$$

(Bewijs: beschouw $f(z)e^{-\delta z}$ $(\delta > 0)$. Pas op deze functie in het eerste en in het vierde kwadrant afzonderlijk(b) toe. We vinden zo, dat $|f(z)e^{-\delta z}| \leqq M$, $(x \geqq 0)$, waarin M het grootste is van de getallen K en het maximum van $|f(x)e^{-\delta x}|$ $(x \geqq 0)$. $|f(x)e^{-\delta x}|$ kan echter geen maximum hebben $> K$, daar $f(z)e^{-\delta z}$ dan in een "inwendig punt" van het halfvlak $x \geqq 0$ een maximum zou hebben.)

<u>Literatuur</u>: Titchmarsh 1947.

Thans enkele corresponderende stellingen voor functies, die langs de rand tot L_2 behoren.

d) Als $f(z)$ analytisch is in de strook $\alpha \leqq x \leqq \beta$ en aldaar van het exp. type, als verder

$$f(\alpha + iy) \in L_2, \quad f(\beta + iy) \in L_2,$$

dan is

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\, dy \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\alpha+iy)|^2 dy + \int_{-\infty}^{\infty} |f(\beta+iy)|^2 dy, \quad (\alpha \leqq x \leqq \beta).$$

((Bewijs: $f(x+iy) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\beta+it)}{\beta+it-x-iy}\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha+it)}{\alpha+it-x-iy}\, dt,$
$(\alpha < x < \beta)$.

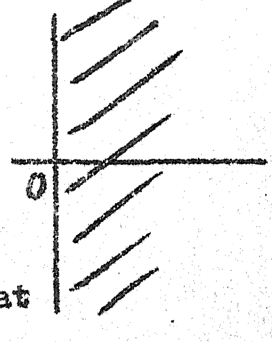
Hieruit volgt, dat er een meetbare functie $g(u)$ bestaat zó, dat

$$g(u)e^{xu} \in L_2 \text{ voor } \alpha \leqq x \leqq \beta,$$

en dat

$$f(x+iy) = \underset{A \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} g(u)e^{(x+iy)u} du \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta).)$$

e) Als $f(z)$ analytisch is voor $x \geqq 0$ en aldaar van het type 0, als verder



$$f(iy) \in L_2,$$

dan is $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dy \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(iy)|^2 dy$, $(x \geqq 0)$.

(Bewijs:
$$f(x+iy) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{it-x-iy}\, dt,$$
$(x > 0)$.

Hieruit volgt, dat er een functie $g(u) \in L_2$ bestaat zó, dat

$$f(x+iy) = \underset{A \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{0} g(u)e^{(x+iy)u} du \quad (x \geqq 0).)$$

<u>Literatuur</u>: Paley en Wiener 1934.

4. Representaties. Een gehele functie $f(z)$ van het exponentiële type $A > 0$ is

$$O(e^{B|z|})$$

voor elke $B > A$ (maar voor geen $B < A$ $(B > 0)$).
Voor $\Re(u) > A$ bestaat dus de Laplace-getransformeerde

$$g(u) = \int_0^\infty f(x)e^{-ux}dx.$$

In plaats van langs de reële as kan men in een willekeurige richting van 0 naar ∞ integreren: $g(u)$ is dus analytisch voor $|u| > A$. Men kan $f(z)$ uit $g(u)$ vinden door

(1) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{zu}g(u)du,$$

waarin de contour C eenmaal in positieve zin buiten om de cirkel $|u| = A$ loopt.
Elke voor $|u| > A$ analytische functie $g(u)$ geeft aldus aanleiding tot een functie $f(z)$ van het exp. type $(\leqq A)$.
Literatuur: Doetsch 1937.

Wij interesseren ons speciaal voor gehele functies van het exp. type $\leqq A$, die langs een bepaalde rechte, zeg de reële as, tot L_2 behoren. De klasse van deze functies is identiek met de klasse der functies

(2) $$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} g(u)e^{izu}du,$$

waarbij $g(u) \in L_2(-A,A)$.

Deze stelling is hier iets scherper geformuleerd dan bij Paley en Wiener 1934. Het bewijs gaat net zo:
Laat $B > A$. We hebben $f(z) = O(e^{B|z|})$. Beschouw de hulpfunctie

$$\frac{e^{-Bz}}{\varepsilon}\int_z^{z+i\varepsilon} f(iw)dw = F(z), \quad (\varepsilon > 0).$$

$F(z)$ is begrensd op de imag. as en op de positief reële as, en van het exp. type. $F(z)$ is dus begrensd voor $x \geqq 0$. Uit 3,e) volgt, daar ook $F(iy) \in L_2$,

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u)e^{zu}du \quad, (x \geqq 0),$$

waarin $G(u) \in L_2$. (De oneig. int. in de zin van L_2).
Hieruit volgt

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_z^{z+\varepsilon} f(w)dw = iF(iz)e^{Biz} = \int_{-\infty}^{B} iG(u-B)e^{izu}du,$$

$(\Im(z) \leqq 0)$. Evenzo vinden we

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_z^{z+\varepsilon} f(w)dw = \int_{-B}^{\infty} iH(u+B)e^{izu}du, \quad (H(u) \in L_2),$$

$(\Im(z) \geqq 0)$. Hieruit volgt, dat de Fourier-getransformeerde van

(3) $$\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} f(w)dw$$

voor $|u| > B$ bijna overal nul is. Dit geldt voor alle $B > A$, dus is de

Fourier-getransformeerde van (3) voor $|u| > A$ aequivalent nul. Nu is de Fourier-getransf. $g(u)$ van $f(x)$ de l.i.m. ($\varepsilon \to 0$) van de getransf. van (3), dus $g(u) \sim 0$, $|u| > A$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} g(u) e^{ixu} du.$$

Gevolg. Als $f(z)$ van het exp. type A is, en langs een lijn tot L_2 behoort, dan is

$$f(z) = o\,(e^{A|z|}).$$

Voor $A > 0$ volgt dit uit de representatie (*) en de ongelijkheid van Schwartz:

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-A}^{A} |g(u)|^2 du \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{-A}^{A} e^{2u|\Im(z)|} du \right\}^{1/2}$$

$$= \text{const.} \left\{ \frac{\sinh 2A|\Im(z)|}{|\Im(z)|} \right\}^{1/2} = o\,(e^{A|z|}).$$

Voor $A = 0$ volgt het direct uit (2): dan is nl. $f(z) \equiv 0$.

5. Een stelling van Pólya.

Aan het slot van 4. vonden we, dat een gehele functie van het exp. type 0, die langs een lijn tot L_2 behoort, noodzakelijk $\equiv 0$ is. Dit is een analogon voor L_2 van de klassieke stelling van Bernstein, die zegt dat een gehele functie van het exp. type 0, die langs een lijn begrensd is, noodzakelijk constant moet zijn. (Bewijs: 3.c)).

Stelling van Pólya. Als $f(z)$ een gehele functie is van het type 0, en als

$$|f(n)| \leq K, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

dan is $f(z)$ een constante.

Van deze stelling zijn vele bewijzen gegeven, onder andere door Tschakaloff en Szegö.

5.1 Bewijs van Paley en Wiener (1934). Men mag $f(z)$ wel even onderstellen. Voor oneven $f(z)$ volgt de stelling dan door $f(z)/z$ te beschouwen; voor willekeurige $f(z)$ door splitsing in een even en een oneven deel.

Beschouw nu

$$g(z) = \{f(z) - f(0)\}/z^2.$$

Hiervoor is

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |g(n)| < \infty.$$

We "interpoleren" $g(z)$ met

$$G(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} g(n) \frac{\sin \pi(n-z)}{\pi(n-z)}.$$

In het volgende bewijzen we, dat $g(z) = G(z)$. Daar $G(z)$ begrensd is op de reële as:

$$|G(x)|^2 \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |ng(n)|^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi(n-x)}{n^2 \pi^2 (n-x)^2}$$

$$\leq \sum_{-\infty}^{\infty} |ng(n)|^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

is dus $g(z)$ begrensd op de reële as. Maar $g(z)$ is van het type 0. Volgens de stelling van Bernstein is dus $g(z)$ een constante, die alleen nul kan zijn. Tenslotte blijkt dus $f(z) = f(0)$.

Rest te bewijzen, dat $g(z) = G(z)$. We weten, dat

$$G(x+iy) = O\{(1+|y|)^{-1} e^{\pi|y|}\}, \text{ voor alle } x.$$

Vorm nu de gehele functie $H(z) = \{g(z) - G(z)\} \operatorname{cosec} \pi z$. Voor alle y en alle gehele n geldt, als $\varepsilon > 0$,

$$H\{(n+\tfrac{1}{2}) + iy\} = e^{\varepsilon|n|}\, O\{e^{(\varepsilon-\pi)|y|}\} + O\left(\frac{1}{1+|y|}\right),$$

uniform in n. Hieruit volgt, dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H\{(n+\tfrac{1}{2}) + iy\}|^2 dy = O(e^{2\varepsilon|n|}).\ ^{*)}$$

Uit 3.d) volgt nu, dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H\{(x+iy)\}|^2 dy = O(e^{2\varepsilon|x|}).$$

We passen de stelling van Cauchy toe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x+iy) e^{iuy} dy = e^{-ux} \int_{-\infty}^{\infty} H(iy) e^{iuy} dy \equiv e^{-ux} \varphi(u), \text{ zeg.}$$

Uit de stelling van Plancherel volgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|^2 e^{-2ux} du = O(e^{2\varepsilon|x|}).$$

Dit kan alleen als $\varphi(u) \sim 0$ voor $|u| > \varepsilon$. ε is willekeurig positief, dus $\varphi(u) \sim 0$. Maar dan moet $H(z) \equiv 0$, dus

$$g(z) = G(z) \quad \text{h.t.b.w.}$$

*) Men kan ook het bewijs als volgt voortzetten: $H(z)$ is van het type 0 (beschouw $|H(z)|$ op de cirkels $|z| = n+\tfrac{1}{2}$). Daar $H(z)$ op een lijn tot L^2 behoort, is $H(z) \equiv 0$

5.2. Bewijs van Levinson 1940. Levinson vervangt de voorwaarde

$$|f(\pm n)| \leq K, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

door

$$|f(\pm z_n)| \leq K, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

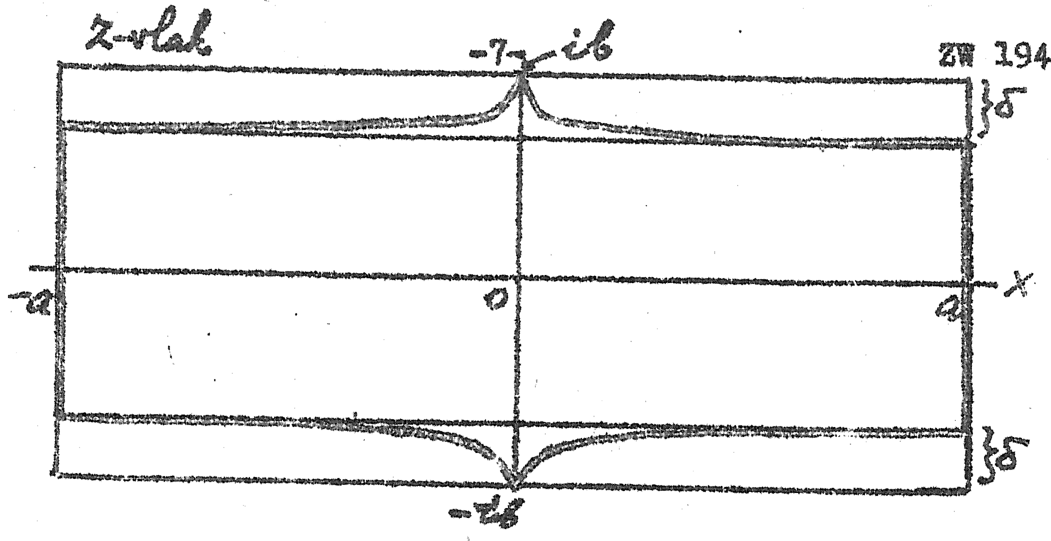
Hierin moet $\{z_n\}$ een rij complexe getallen zijn, waarvan de moduli r_n niet te veel van n (of van een constante keer n) afwijken, b.v.

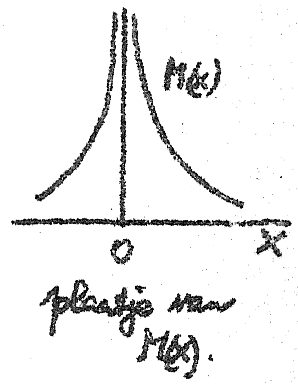
$$r_n - n = O\left\{\frac{n}{(\log n)^{1+\delta}}\right\}, \quad \delta > 0.$$

Bovendien moeten de r_n's niet op de duur al te weinig gaan verschillen: er komt nog bij een voorwaarde zoals

$$r_{n+1} - r_n > \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n > A).$$

Levinson's bewijs van deze stelling berust op de volgende interessante hulpstelling: Laat $M(x)$ een positieve even functie zijn, die voor $x > 0$





monotoon dalend is, en die → ∞ als $x \downarrow 0$.
Laat $\varphi(z)$ analytisch zijn voor $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, en laat $|\varphi(x+iy)| \leq M(x)$ in de rechthoek.
Als nu $\int_0^a \log\log M(x)\,dx$ bestaat, dan is er bij elke $\delta > 0$ een constante $C = C(M(x), \delta)$ zó, dat

$$|\varphi(x+iy)| \leq C, \quad (|x| \leq a, \ |y| \leq b-\delta).$$

Het kost nogal wat moeite om dit te bewijzen. Ik zal het hier niet in het algemeen doen, maar <u>voor een speciale keuze van $M(x)$</u>, nl. $M(x) = 1/|x|^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$.
We zoeken een functie $\Phi(z)$, analytisch in en op de rand van het rood omlijnde gebied, behalve in $z = \pm b$, zódanig, dat $|\Phi(z)|$ in de naar $\pm b$ gaande "stekels" van het gebied minstens zo sterk als $1/M(x)$ naar nul gaat, terwijl $|\Phi(z)| \geq C_1(\delta) > 0$ in $|x| \leq a$, $|y| \leq b-\delta$.
Als $M(x) = 1/|x|^{\alpha}$ voldoet blijkbaar

$$\Phi(z) = e^{\frac{i}{z-b}} \cdot e^{-\frac{i}{z+b}}.$$

Nu is in het rode gebied

$$|\varphi(z)\,\Phi(z)| \leq M(x)\,|\Phi(z)| \leq C_2,$$

waarin C_2 onafhankelijk is van $\varphi(z)$. In de rechthoek $|x| \leq a$, $|y| \leq b-\delta$ is dan

$$|\varphi(z)| \leq C_2/C_1 = C\,(M(x), \delta).$$

We bewijzen nu even <u>de oorspronkelijke stelling van Pólya met de methode v. Levinson.</u>

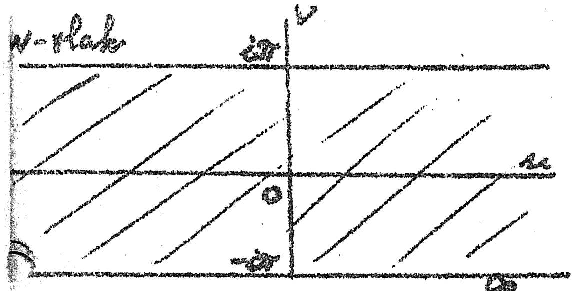
Voor elke $N > 0$ zij gedefinieerd

$$F_N(w) = \frac{1}{2i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{z\,f^N(z)}{\sin \pi z}\, e^{wz}\,dz, \tag{1}$$

waarin $w = u + iv$. Daar op de integratieweg ($z = i\,y$)

$$\frac{z\,f^N(z)}{\sin \pi z} = O\left(e^{-(\pi-\varepsilon)|y|}\right), \qquad (|y| \to \infty)$$

voor elke $\varepsilon > 0$, is $F_N(w)$ analytisch in de strook $|v| < \pi$.



Als $u < 0$, $|v| < \pi$, kan de integratieweg in (1) met een boog naar rechts worden gesloten:

$$F_N(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n f^N(n) e^{+nw}, \quad \left(u < 0, \ |v| < \pi\right).$$

Evenzo

$$F_N(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n f^N(-n) e^{-nw}, \quad \left(u > 0, \ |v| < \pi\right).$$

Nu kunnen we zonder beperking aannemen, dat

$$|f(\pm n)| \leq 1, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dan volgt uit bovenstaande reeksen voor $F_N(w)$:

(2) $$|F_N(w)| \leq \sum_{1}^{\infty} n e^{-n|u|} \leq \frac{A}{u^2}, \qquad (A \text{ onafh. van } N).$$

Neem nu in Levinson's hulpstelling $M(u) = A/u^2$. We vinden dan, $a=1$ en $\delta = b$ bv. gelijk 1 nemend,

(3) $$|F_N(u)| \leq C, \qquad |u| \leq 1.$$

Hierin is C onafhankelijk van N. Uit (2) en (3) volgt

(4) $$|F_N(u)| \leq \frac{B}{1+u^2}, \qquad (-\infty < u < \infty).$$

(B onafhankelijk van N).

Lossen we tenslotte

$$\frac{iy\,f^N(iy)}{\sin \pi i y}$$

uit de Fourier-integraal (1) (met $z = iy$, $w = u$) op, dan vinden we in verband met (4)

$$\left|\frac{iy\,f^N(iy)}{\sin \pi i y}\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_N(u)\, e^{-iuy}\, du\right| \leq B,$$

of

$$|f(iy)| \leq \left|\frac{B \sin \pi i y}{y}\right|^{\frac{1}{N}}.$$

Laat $N \to \infty$. Daar B onafh. is van N, zien we dat

$$|f(iy)| \leq 1.$$

Uit 3.(3) volgt nu, dat

$$|f(z)| \leq 1,$$

dus f(z) is een constante.

6. Iets over de nulpunten van bepaalde gehele functies van het exponentiële type.

(Carlson) Als f(z) van het exp. type $\alpha < \pi$ is, dan volgt uit $f(n)=0$ $(n=0,1,2,\dots)$ dat $f(z) \equiv 0$. (Het is al voldoende als f(z) voor $x \geq 0$ anal. is en van een of ander exp. type, terwijl $f(iy) = O(e^{(\pi-\delta)|y|})$ $(|y| \to \infty)$, voor zekere $\delta > 0$). Literatuur: Titchmarsh 1947.

(Boas) Als f(z) geheel is,

$$|f(z)| < \varepsilon(|z|)\, e^{\pi|z|}\, (1+|y|)^{-2\delta},$$

$0 < \delta < \frac{1}{2}$, $\lim \varepsilon(r) = 0$ $(r \to \infty)$, terwijl

$$f(z_n) = 0, \quad (n=0,1,2,\dots),$$

waarin

$$|z_n - n| < \delta,$$

dan is $f(z) \equiv 0$. (Zie Boas 1940).

(Levinson) We kunnen veel algemener rijen $\{z_n\}$ van nulpunten toelaten, als we de groei van f(z) in een bepaalde richting sterk beperken:
Als f(z) geheel is en van het exp. type α, als

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \log |f(x) f(-x)|\, dx$$

bestaat en als

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log |f(ix)|}{x} \leq 0,$$

dan hebben de nulpunten van f(z) zowel in $x \geqslant 0$ als $x \leqslant 0$ een dichtheid B, die $\leqslant \frac{\alpha}{\pi}$ is. D.w.z. als $n_1(r)$ het aantal nulpunten is van f(z) met $x \geqslant 0, |z| \leqslant r$, dan bestaat

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n_1(r)}{r} = B,$$

en $B \leqslant \frac{\alpha}{\pi}$. Evenzo voor het aantal nulpunten $n_2(r)$ in $x \leqslant 0$, $|z| \leqslant r$.

Deze stelling van Levinson (1940) drukt uit, dat een functie van het exp. type α veel op sin α z lijkt, als hij niet te groot is langs de reële as. Zijn nulpunten liggen nl. ook "dicht bij de reële as", en ze hebben een dichtheid in de bovengenoemde zin. Die dichtheid is tenslotte $\leqslant \frac{\alpha}{\pi}$, de dichtheid bij sin α z.

Literatuur: Levinson 1940.

× × ×

Geciteerde literatuur.

Boas 1940: Entire functions bounded on a line, Duke Mathematical Journal 6, 148-169. Zie ook de "Correction", Duke M.J. 13 (1946) 483-484

Boas 1942: Entire functions of exponential type, (overzichtsartikel), Bulletin Am.Math.Soc. 48 839-849.

Carmichael 1934: Functions of exponential type, (overzichtsartikel), Bulletin Am.Math.Soc. 40 241-261.

Doetsch 1937: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin.

Levinson 1940: Gap and density theorems, Am.Math.Soc.Coll.Publ. 26, New York.

Paley en Wiener 1934: Fourier transforms in the complex domain, Am.Math.Soc.Coll.Publ. 19, New York.

Titchmarsh 1937: Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Un.Press.

Titchmarsh 1947: The theory of functions, Oxford Un.Press.