STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1952 - 011

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit

Dr. F. van der Blij

7 mei

# Het elementaire onderwerp "regelmatige veelvlakken" van topologisch standpunt uit

1952

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

7 Mei; voordracht door

Dr F.van der Blij

over:

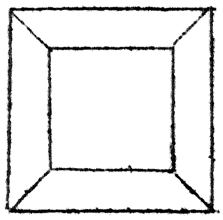
## Het elementaire onderwerp "regelmatige veelvlakken" van topologisch standpunt uit.

§ 1. In plaats van de gewone metrische definitie voor de regelmatige veelhoek, kiezen wij de volgende definitie: een (topologisch) regelmatige veelhoek is een complex van punten en lijnstukken zodanig dat twee lijnstukken nooit inwendige punten gemeen hebben; dat in ieder punt een gelijk aantal lijnstukken uitkomt en dat het complex niet in twee niet samenhangende deelcomplexen verdeeld kan worden. Stel het aantal stukken per hoekpunt k, dan correspondeert met k=2 de normale gesloten veelhoek. Enkele voorbeelden zijn het viervlak (k=3), het twaalfvlak (k=3) en het tienzijdig prisma (k=3), het twintigvlak (k=5).

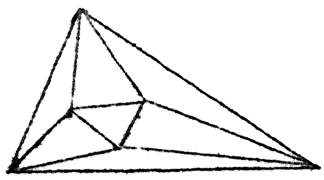
We classificeren de complexen naar het verschil van het aantal lijnstukken R en het aantal hoekpunten H. Schrijven wij R-H=t, dan geldt omdat $R = \frac{k}{2} H$, $\frac{k}{2} H - H = t$ of te wel $k=2+ \frac{2t}{H}$.

Als k = 2, volgt t = 0 en R = H (gewone veelhoek).

Als k = 3, volgt H = 2t en R = 3t



Van het geval k=4 noemen wij H=3, R=6 (volledige driezijde in het projectieve vlak); H=4, R=8 (vierkant op torus of viervlak, waarvan twee overstaande ribben in de projectieve ruimte verlengd zijn); H=6, R=12

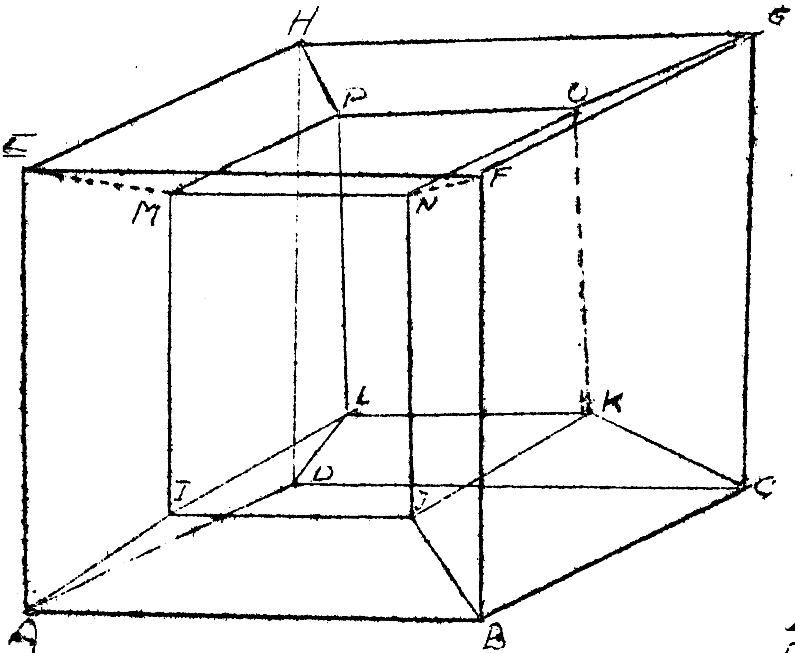
(volledige vier~~hoek~~zijde of  )

Ten slotte noemen wij nog H=1, R=t+1, k=2t+2 (in het projectieve vlak t+1 lijnen door één punt) en H=2, R=t+2, k=t+2 (op de bol t+2 halve grote cirkels door twee tegenpunten).

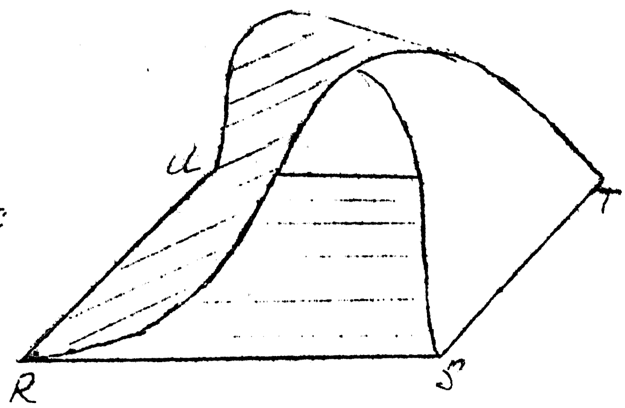
§ 2. Regelmatige veelvlakken worden meestal gedefinieerd door metrische voorwaarden. Het aantal mogelijke regelmatige veelvlakken wordt dan afgeleid uit de eigenschap dat de som van de zijden van een veelvlakshoek kleiner is dan $360^\circ$. De mogelijkheden zijn dan: $3 \times 60^\circ$, $4 \times 60^\circ$, $5 \times 60^\circ$, $3 \times 90^\circ$, $3 \times 108^\circ$. De grensgevallen $6 \times 60^\circ$, $4 \times 90^\circ$ en $3 \times 120^\circ$ geven de regelmatige vlakvullingen.

We definiëren nu: een (topologisch) regelmatig veelvlak is een samenstel van een eindig aantal topologische veelhoeken met k=2 en alle met hetzelfde aantal hoekpunten, zodanig dat: $1^\circ$ twee veelhoeken nooit een inwendig punt gemeen hebben, $2^\circ$ de zijden van de veelhoeken twee aan twee samenvallen, $3^\circ$ het geheel niet uiteenvalt in twee disjuncte delen, $4^\circ$ de veelhoeken in een hoekpunt zo genummerd kunnen worden, dat twee opeenvolgenden steeds een ribbe door het hoekpunt gemeen hebben, $5^\circ$ in ieder hoekpunt een gelijk aantal veelhoeken voorkomt.

Wij geven eerst een paar voorbeelden; dat de gewone regelmatige veelvlakken aan deze definitie voldoen is duidelijk.




I In ieder hoekpunt komen hier vier vierhoeken uit.




II Dit lichaam heeft drie zijvlakken te weten de vierhoek RSTU, de vierhoek RTSU en de vierhoek RTUS. In ieder hoekpunt komen alle drie de vierhoeken voor.

Wij vragen nu algemeen naar lichamen opgebouwd uit k-hoeken, zodat in ieder hoekpunt $\lambda$ van deze k-hoeken voorkomen. Stel het aantal zijvlakken Z, dan geldt voor het aantal ribben $R = \frac{k}{2} Z$ en voor het aantal hoekpunten $H = \frac{k}{\lambda} Z$.

§ 3. In de elementaire stereometrie wordt voor veelvlakken de gewoonlijk naar Euler, soms naar Descartes, genoemde formule Z+H=R+2 vermeld. We zullen deze eerst bewijzen, door het oppervlak van het veelvlak te beschouwen. Dit is door de ribben in gescheiden vlakdelen verdeeld. Om deze met elkaar in contact te brengen moeten tenminste Z-1 ribben weggenomen worden. Er blijft dan een lijnstukkencomplex over. Indien het oppervlak de structuur van een boloppervlak heeft is dit complex enkelvoudig samenhangend, het aantal resterende lijnstukken is H-1, zodat geldt Z+H=R+2. Heeft het oppervlak de topologie van het projectieve vlak, dan zal het lijnstukkencomplex één gesloten keten bevatten en het aantal resterende lijnstukken is H, de formule Z+H=R+1. Op het oppervlak van de torus zal het aantal resterende lijnstukken H+1 zijn, zodat daar geldt Z+H=R.

We beschouwen de bovengegeven voorbeelden. Voor de Platonische regelmatige lichamen geldt Z+H=R+2. In voorbeeld I heeft men Z=16, R=32, H=16 dus Z+H=R. In voorbeeld II heeft men Z=3, R=6, H=4 dus Z+H=R+1, dit oppervlak, de gesloten Möbius-band, is inderdaad topologisch equivalent met het projectieve vlak.

§ 4. We beschouwen nu eerst Z+H=R+2 en laten naast de klassieke veelvlakken ook overdekkingen van de bol met tweehoeken toe. Als we uitwerken vinden wij via $Z+\frac{k}{\lambda}Z=\frac{k}{2}Z+2$ dat $(k-2)(\lambda-2)=4-\frac{4\lambda}{Z}$. De mogelijke oplossingen zijn

| $\lambda$ | k | Z | R | H | omschrijving |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | lijnstuk op bol |
| 2 | k | 2 | k | k | k-hoek op bol |
| $\lambda$ | 2 | $\lambda$ | $\lambda$ | 2 | $\lambda$ twee hoeken op bol |
| 3 | 3 | 4 | 6 | 4 | viervlak |
| 3 | 4 | 6 | 12 | 8 | kubus |
| 3 | 5 | 12 | 30 | 20 | twaalfvlak |
| 4 | 3 | 8 | 12 | 6 | achtvlak |
| 5 | 3 | 20 | 30 | 12 | twintigvlak |

§ 5. Vervolgens beschouwen wij Z+H=R+1 en bestuderen regelmatige vlakvullingen van het projectieve vlak. Na eenvoudig herleiden vinden wij $(k-2)(\lambda-2)=4-\frac{2\lambda}{Z}$. De mogelijkheden zijn:

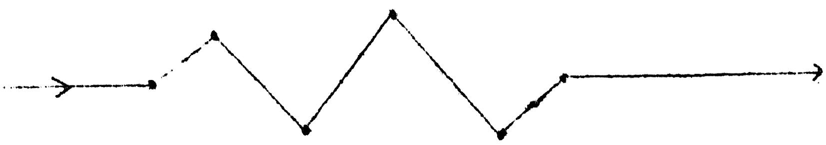


Fig. 1

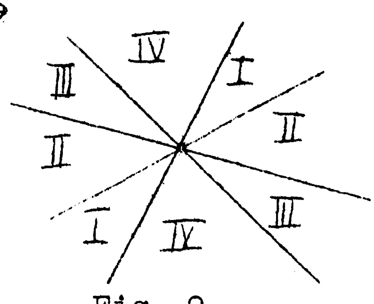



Fig. 2

| $\lambda$ | k | Z | R | H | fig |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | k | 1 | $\frac{1}{2}$k | $\frac{1}{2}$k | 1 |
| $\lambda$ | 2 | $\frac{1}{2}\lambda$ | $\frac{1}{2}\lambda$ | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 3 | 6 | 4 | 4 |
| 3 | 5 | 6 | 15 | 10 | 5 |
| 4 | 3 | 4 | 6 | 3 | 6 |
| 5 | 3 | 10 | 15 | 6 | 7 |

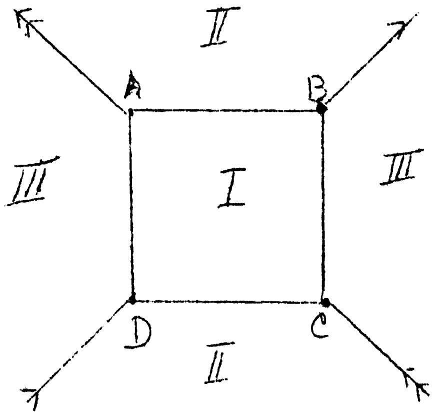



fig. 4

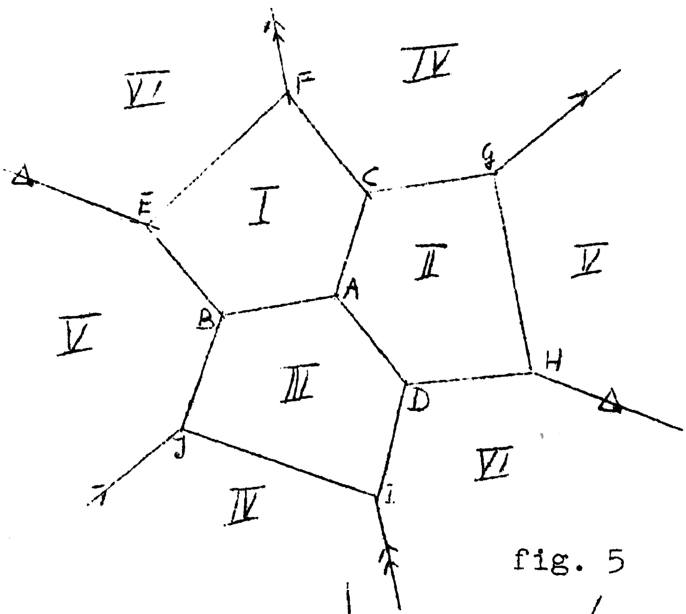



fig. 5

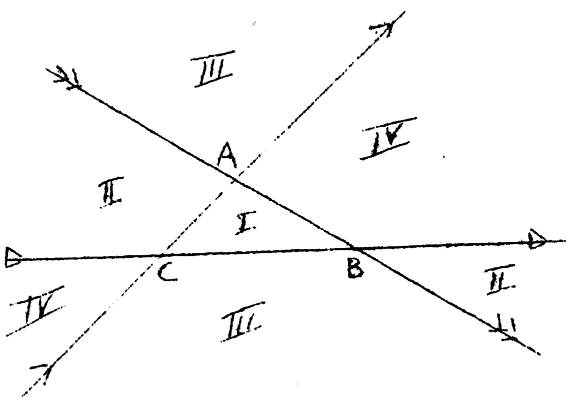



fig. 6

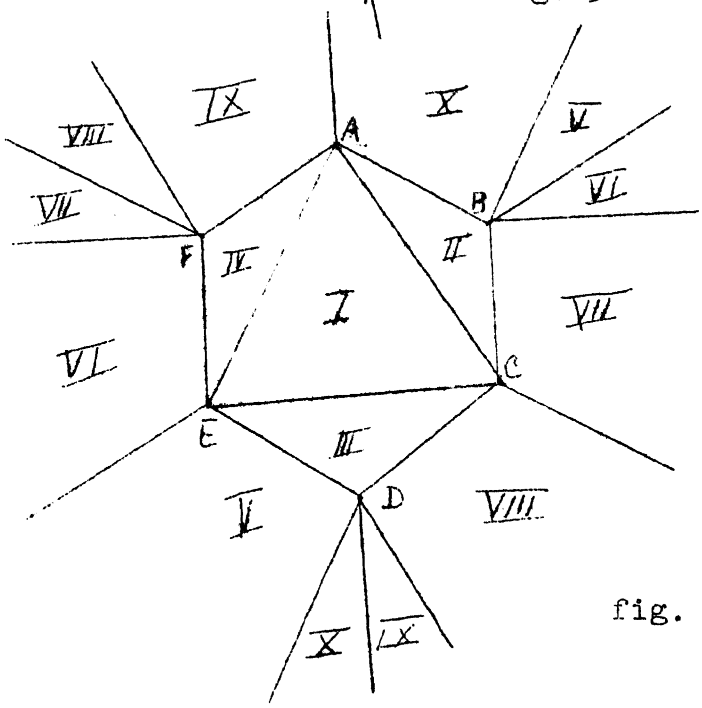



fig. 7

§ 6. Vervolgens beschouwen wij regelmatige veelhoeksnetten op de torus. Uit Z+H=R volgt $(k-2)(\lambda -2) = 4$. De enige mogelijkheden zijn: $k=6$, $\lambda=3$, Z willekeurig; $k=4$, $\lambda=4$, Z willekeurig en $k=3$, $\lambda=6$, Z even. Het zijn de normale zeshoekige, vierkante en driehoekige vlakke netten, waarvan de randen op geschikte wijze geïdentificeerd moeten worden.

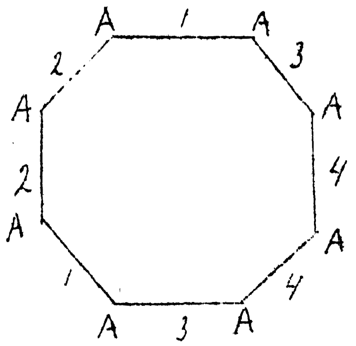
§ 7. Ten slotte nog iets over de dubbele torus (bol met twee gaten). Nu geldt $Z+H=R-2$, uitgewerkt $(k-2)(\lambda-2) = 4 + \frac{4\lambda}{Z}$ of ook wel

$$Z = \frac{4\lambda}{k\lambda-2k-2\lambda}, \quad R = \frac{2k\lambda}{k\lambda-2k-2\lambda}, \quad H = \frac{4k}{k\lambda-2k-2\lambda}$$

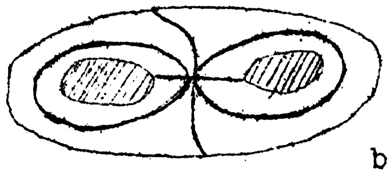
Hieruit volgt $R = \dfrac{2}{1-\frac{2}{k}-\frac{2}{\lambda}}$, anderzijds moet $R = Z+H+2 \geqslant 4$

Dus moet $\frac{1}{2} > \frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda} \geqslant 1/4$. Er zijn slechts een eindig aantal waarden voor $k$ en $\lambda$, die hieraan voldoen en waarvoor Z, R en H gehele getallen worden. Wij grijpen slechts enkele uit de 25 mogelijke oplossingen:

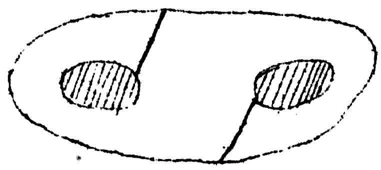
$\underline{\lambda = 8,\ k = 8}$; $Z = 1$, $R = 4$, $H = 1$.



uitslag

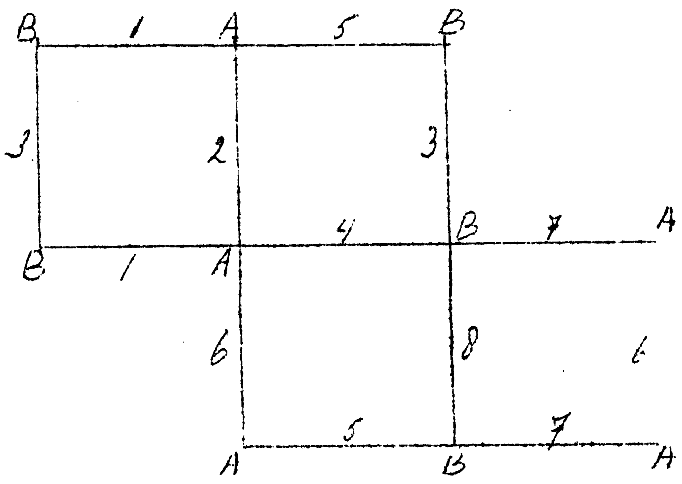


bovenzijde

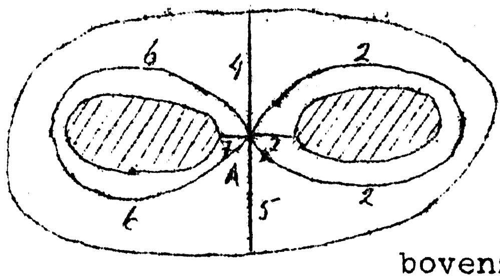


onderzijde

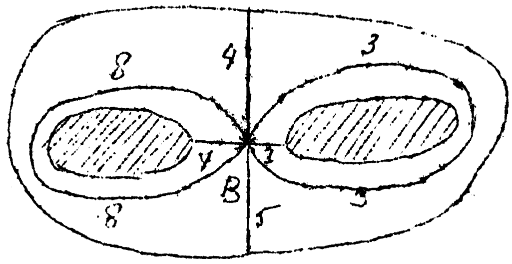
$\underline{\lambda = 8,\ k = 4}$; $Z = 4$, $R = 8$, $H = 2$.



uitslag

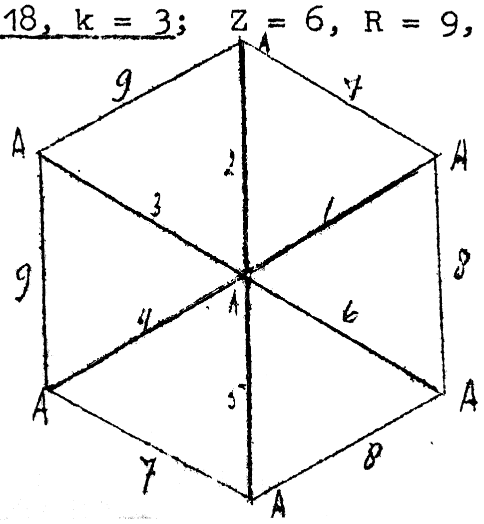


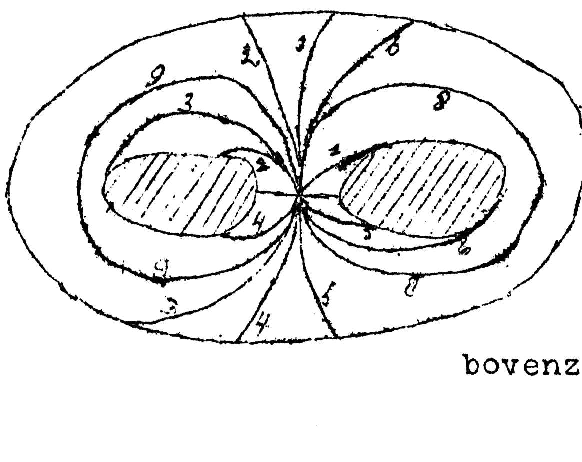
bovenzijde



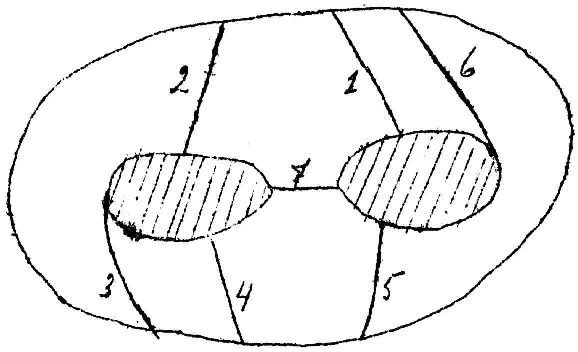
onderzijde

$\underline{\lambda = 18,\ k = 3}$; $Z = 6$, $R = 9$, $H = 1$.





bovenzijde




onderzijde

§ 8. Naast de vijf Platonische regelmatige lichamen bestaan er ook Archimedische halfregelmatige lichamen; dit zijn lichamen opgebouwd uit regelmatige veelhoeken van verschillende soort, die in ieder hoekpunt in eenzelfde aantal voorkomen. Triviale voorbeelden zijn geschikt gekozen regelmatige n-zijdige prismata en primoïden. Uit de Platonische lichamen zijn Archimedische af te leiden, b.v. door de middens van de ribben als hoekpunten van een nieuw lichaam te beschouwen. Bij de kubus ontstaat zo een uit vierkanten en gelijkzijdige driehoeken opgebouwd lichaam. De volledige structuur is (per hoekpunt 2 driehoeken en 2 vierkanten) (3344) $H = 12$, $R = 24$, $Z_3 = 8$, $Z_4 = 6$.
Uit het twaalfvlak vinden wij zo:
(3355) $H = 30$, $R = 60$, $Z_3 = 20$, $Z_5 = 12$.
Ook kunnen wij van de regelmatige lichamen zulke hoekjes afsnijden dat de oorspronkelijke regelmatige n-hoeken overgaan in regelmatige 2n-hoeken. We geven een overzicht:

| oorspr.lich. | | H | R | | |
|---|---|---|---|---|---|
| viervlak | 366 | 12 | 18 | $Z_3=4$ | $Z_6=4$ |
| kubus | 388 | 24 | 36 | $Z_3=8$ | $Z_8=6$ |
| achtvlak | 466 | 24 | 36 | $Z_4=6$ | $Z_6=8$ |
| twaalfvlak | 31010 | 60 | 90 | $Z_3=20$ | $Z_{10}=12$ |
| twintigvlak | 566 | 60 | 90 | $Z_5=12$ | $Z_6=20$ |

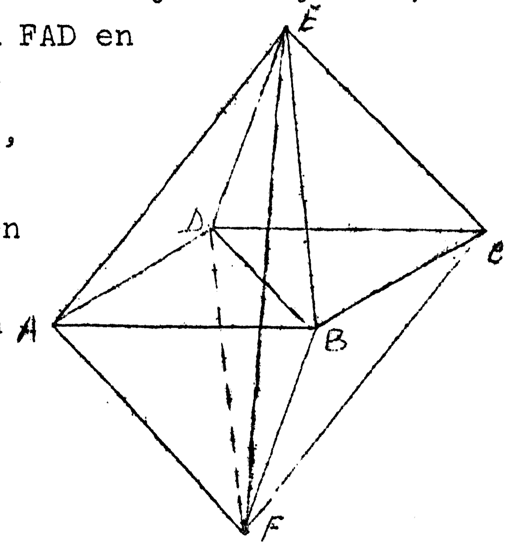
§ 9. We kunnen ook deze lichamen van topologische zijde benaderen. Hiertoe stellen wij het aantal k-hoeken per hoekpunt $\lambda_k$. Het totale aantal k-hoeken is dan $Z_k = \frac{\lambda_k}{k} H$, het aantal ribben $R = \frac{1}{2} H \sum \lambda_k$

Indien wij naar die lichamen vragen, die oppervlakken hebben met de structuur van een boloppervlak, geldt

$$H\sum \frac{\lambda_k}{k} + H = \tfrac{1}{2} H\sum \lambda_k + 2.$$

Op de bovengenoemde prismata en prismoïden na zijn er slechts een eindig aantal mogelijkheden; wij moeten dan echter veronderstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. We geven nog één voorbeeld $\lambda_4 = 1$, $\lambda_6 = 1$, $\lambda_{10} = 1$; $H = 120$, $R = 180$, $Z_4 = 30$, $Z_6 = 20$, $Z_{10} = 12$.

Van de structuur van het projectieve vlak bespreken wij het klassieke veelvlak van Reinhardt, dat topologisch equivalent is met het bekende Romeinse oppervlak van Steiner ($x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + xyz = 0$). Het bestaat uit vier driehoeken ABE, FBC, CDE en FAD en drie vierhoeken AECF, ABCD en BFDE. Hiervoor geldt $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 2$; $H = 6$, $R = 12$, $Z_3 = 4$, $Z_4 = 3$.

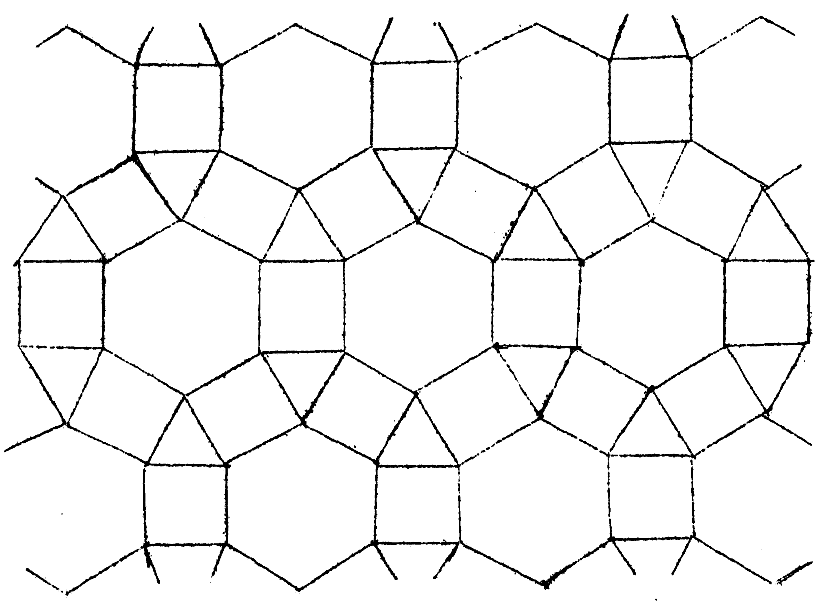



Tot slot bespreken wij nog enkele voorbeelden van de halfregelmatige overdekkingen van de torus, waarmee halfregelmatige vlakvullingen van het Euclidische vlak corresponderen. We vinden ze alle uit:

$$\sum \frac{\lambda_k}{k} + 1 = \tfrac{1}{2}\sum \lambda_k .$$

Ze zijn alle op min of meer eenvoudige wijze af te leiden uit de netten met drie, vier of zeshoeken. We tekenen een tweetal van de minder eenvoudige figuren.

$\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_6 = 1$.



$\lambda_4 = 1, \lambda_6 = 1, \lambda_{12} = 1.$