STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1954 - 011

Voordracht in de serie Actualiteiten

A.J.W. Duijvestijn

29 mei 1954

Enige aspecten van een bepaald type tweede orde differentiaalvergelijkingen

1954

Voordracht door A.J.W. Duijvestijn in de
serie Actualiteiten op 29 Mei 1954.

<u>Enige aspecten van een bepaald type tweede orde differentiaalvergelijkingen.</u>

1. Inleiding.

Uit de Quantummechanica weten we dat de wisselwerking van twee deeltjes die een zekere massa en lading vertegenwoordigen, beheerst wordt door de vergelijking van Schroedinger:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + (E-V)\Psi = 0. \qquad (1.1)$$

Hierin is $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h = constante van Planck)

m = gereduceerde massa van de twee deeltjes

E = energie van het systeem

V = potentiaal van het systeem

Ψ = golffunctie .

Indien de potentiaal alleen een functie is van de voerstraal kunnen we 1.1 vereenvoudigen door over te gaan op bolcoordinaten. Voor het radiale gedeelte vinden we dan:

$$(r\psi)'' + \left\{E - \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r)\right\}\psi r = 0 \qquad (1.2)$$

met: $\Psi = \psi(r).\ P_l^m(\cos\theta).e^{\pm im}$.

V(r) kan in het algemeen een ingewikkelde functie zijn. We zullen echter veronderstellen dat V(r) de volgende gedaante heeft

$$V(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r^{-1} + \alpha_2 r^{-2} + \ldots + \alpha_m r^{-m}.$$

We schrijven (1.2) iets anders door te stellen

$$r\psi = y$$

$$\varphi = \alpha_0 + E + \alpha_1 r^{-1} + (\alpha_2 - l(l+1))r^{-2} + \alpha_3 r^{-3} + \ldots + \alpha_m r^{-m} =$$

$$\beta_0 + \beta_1 r^{-1} + \beta_2 r^{-2} + \ldots + \beta_m r^{-2m}$$

$$y'' + y\varphi = 0 . \qquad (1.3)$$

Uit physische overwegingen eisen we nog $y(0) = y'(0) = 0$.

Indien de potentiaal $V(r) \equiv 0$ gaat (1.2) over in

$$y'' + \left(E - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)y = 0. \qquad (1.4)$$

In de theoretische physica is men nu speciaal geinteresseerd in het faseverschil op oneindig tussen de oplossingen van (1.2) en (1.4).

We zullen in het volgende de fase definieren en een methode aangeven deze numeriek te berekenen.

2. Geval dat $V(r) \equiv 0$.

We hebben dan:

$$y'' + y\left\{E - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\} = 0 \tag{2,1}$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Stellen we nog $E = k^2$ (k reeël) dan vinden we als oplossing:

$$y = C_1 \, r^{\frac{1}{2}} \, J_{l+\frac{1}{2}} \, (kr). \qquad C_1 = \text{constant.} \tag{2.2}$$

3. De Madelung transformatie.

We zullen nu de differentiaalvergelijking

$$y'' + y\,\mathfrak{f} = 0 \tag{3.1}$$

$$= k^2 + \beta_1 \, x^{-1} + \beta_2 \, x^{-2} + \ldots + \beta_m \, x^{-m}$$

$$\text{met } k^2 = \alpha_o + E \qquad k \text{ reeël}$$

transformeren door te stellen

$$y = C \, A(x) \, e^{i \, P(x)}. \tag{3.2}$$

De randvoorwaarden laten we voorlopig buiten beschouwing.

We eisen dat $A(x)$ en $P(x)$ reële functies van x zijn.

In (3.2) is C een complexe constante.

We laten eerst zien dat hiermee alle oplossingen van (3.1) worden weergegeven. Immers nemen we $C = C_1 + i\,C_2$.

Dan laat (3.2) zich schrijven als:

$$y = (C_1 - C_2)\left\{A \cos P - A \sin P\right\} + i(C_1 + C_2)\left\{A \cos P + A \sin P\right\}$$

waaruit dan volgt dat $y_1 = (C_1 - C_2)\left\{A \cos P - A \sin P\right\}$

en $y_2 = (C_1 + C_2)\left\{A \cos P + A \sin P\right\}$

beiden aan de differentiaalvergelijking voldoen.

Hiermede hebben we 2 onafhankelijke oplossingen gevonden waardoor alle oplossingen van (3.1) bepaald zijn.

We zullen echter overgaan op een ander fundamentaalstelsel door:

$$y_3 = \frac{(C_1 + C_2)y_1 + (C_1 - C_2)y_2}{C_1^2 - C_2^2} = A \cos P \tag{3.3}$$

en

$$y_4 = \frac{(c_1+c_2)y_1+(c_1-c_2)y_2}{c_1^2-c_2^2} = A \sin P \qquad (3.4)$$

te kiezen.

We zullen $A(x)$ de amplitude en $P(x)$ de fase van de differentiaalvergelijking noemen. De amplitude voldoet nu kennelijk nog aan de voorwaarde

$$y_3^2 + y_4^2 = A^2(x), \qquad (3.5)$$

terwijl de fase voldoet aan:

$$\frac{y_4}{y_3} = \mathrm{tg}\, P\ . \qquad (3.6)$$

Er zijn dus 2 speciale oplossingen waarvan de som van de kwadraten juist het kwadraat van de amplitude is.

4. Asymptotisch gedrag van de oplossingen van (3.1).

Om het asymptotisch gedrag te bepalen van de oplossingen van (3.1), transformeren we de vergelijking door middel van $y=e^{\lambda x}\ u(x)$ waardoor deze overgaat in

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2\lambda\frac{du}{dx} + u\left\{\lambda^2 + k^2 + \beta_1\ x^{-1}+\dots+\beta_m\ x^{-m}\right\} = 0. \qquad (4.1)$$

Verder stellen we nog $u = x^{\sigma}\ w(x)$ en kiezen dan $\lambda = ik$ en $\sigma = i\,\frac{\beta_1}{2k}$.
Het resultaat van (4.1) wordt dan

$$w'' + i\ w'\left\{2k+\frac{\beta_1}{k}\right\} + w\left\{\ \sigma(\sigma-1) + {}_2)x^{-2}+\beta_3x^{-3}+\dots+\beta_m x^{-m} = 0. \qquad (4.3)$$

Aan (4.3) voldoet een functie met de volgende asymptotische voorstelling

$$w \sim \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{x^v} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v'+ic_v''}{x^v}\ ,$$

(Ince ordinary differential equations, blz. 170).

waarbij de coefficienten gevonden kunnen worden door formele substitutie in de differentiaalvergelijking. De functie y die aan (3.1) voldoet, heeft derhalve een asymptotische voorstelling

$$y \sim e^{ikx}\ x^{i\frac{\beta_1}{2k}}\left\{\sum_0^{\infty} \frac{c_v'}{x^v} + i\sum_0^{\infty}\frac{c_v''}{x^v}\right\} \qquad (4.4)$$

Scheiden we nog reële en imaginaire delen, dan vinden we tenslotte:

$$y \sim \cos\left(kx + \frac{\beta_1}{2k}\log x\right)\sum_0^{\infty}\frac{c_v'}{x^v} - \sin\left(kx+\frac{\beta_1}{2k}\log x\right)\sum_0^{\infty}\frac{c_v''}{x^v} +$$
$$i\cos\left(kx+\frac{\beta_1}{2k}\log x\right)\sum_0^{\infty}\frac{c_v''}{x^v} + i\sin\left(kx+\frac{\beta_1}{2k}\log x\right)\sum_0^{\infty}\frac{c_v'}{x^v}\ . \qquad (4.5)$$

Uit (4.5) volgt dat er twee oplossingen van (3.1) zijn, die de resp. asymptotische voorstellingen bezitten

$$y_1 \sim \cos(kx + \frac{\beta_1}{2k}) \sum_{0}^{\infty} \frac{C'_v}{x^v} - \sin(kx + \frac{\beta_1}{2k} \log x) \sum_{0}^{\infty} \frac{C''_v}{x^v} \qquad (4.6)$$

en

$$y_2 \sim \cos(kx + \frac{\beta_1}{2k}) \sum_{0}^{\infty} \frac{C''_v}{x^v} + \sin(kx + \frac{\beta_1}{2k} \log x) \sum_{0}^{\infty} \frac{C''_v}{x^v} \quad . \qquad (4.7)$$

Zij y_3 een willekeurige oplossing van (3.1), dan heeft deze een asymptotische voorstelling:

$$y_3 \sim \cos(kx + \frac{\beta_1}{2k} \log x) \sum_{0}^{\infty} \gamma'_v \, x^{-v} + \sin(kx + \frac{\beta_1}{2k} \log x) \sum_{0}^{\infty} \gamma''_v \, x^{-v} \qquad (4.7)$$

waarin

$$\gamma'_v = C_1 . C''_v + C_2 . C'_v$$

$$\gamma''_v = C_1 . C'_v + C_2 . C''_v \qquad \text{met vaste } C_1 \text{ en } C_2 \text{ .}$$

We zullen nu tot een asymptotische voorstelling van de Amplitude trachten te komen.

Daartoe schrijven we (4.7) als volgt

$$y_3 \sim (\sum_{0}^{\infty} \gamma'_v \, x^{-v})^2 + (\sum_{0}^{\infty} \gamma''_v \, x^{-v})^2 . \sin\left\{kx + \frac{\beta_1}{2k} \log x + \operatorname{bgtg} \frac{\sum_{0}^{\infty} \gamma'_v x^{-v}}{\sum_{0}^{\infty} \gamma''_v x^{-v}}\right\} \qquad (4.8)$$

Verder volgt uit (3.3) en (3.4) dat

$y_3 = C_3 \, A \cos P + C_4 \, A \sin P$ waarin C_3 en C_4 bepaalde constanten zijn (4.9)

Maar (4.9) is ook als volgt te interpreteren:

$$y_3 = \sqrt{C_3^2 + C_4^2} \, .A. \sin(P + \operatorname{bgtg} \frac{C_3}{C_4}) \qquad (4.10)$$

Uit (4.10) zien we tevens dat Amplitude op een multiplicatieve factor en de fase op een additieve constante na bepaald is. Dit volgde ook al uit (3.2). Verder noemen we nog $\sqrt{C_3^2 + C_4^2}.A$ de "wijdte" van y_3

en $P + \operatorname{bgtg} \frac{C_3}{C_4}$ de "individuële fase".

We vinden dus: $A \sim \frac{1}{\sqrt{C_3^2 + C_4^2}} \quad (\sum_{0}^{\infty} \gamma'_v x^{-v})^2 + (\sum_{0}^{\infty} \gamma''_v \, x^{-v})^2$ (4.11)

$$\text{en} \qquad P \sim kx + \frac{\beta_1}{2k} \log x + \operatorname{bgtg}\left\{\frac{\sum_{0}^{\infty} \gamma'_v \, x^{-v}}{\sum_{0}^{\infty} \gamma''_v \, x^{-v}}\right\} - \operatorname{bgtg} \frac{C_3}{C_4} \quad .(4.12)$$

Bovendien is nog $A'_{\infty} = 0$.

5. Bepaling van Amplitude en fase uit de oplossingen van (3.1).

Zij gegeven een oplossing y_a van

$$y'' + y\varphi = 0 \qquad (3.1)$$
$$\varphi = k^2 + \beta_1 x^{-1} + \beta_2 x^{-2} + \dots + \beta_m x^m$$
k^2 reeël.

Een andere oplossing is dan:

$$y_b = y_a \int_{C_2}^{x} \frac{C_1}{y_a^2}\,dt,$$ waarin C_1 en C_2 constanten zijn.

y_a en y_b zijn onafhankelijke oplossingen, immers de Wronski determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_a & y_a \int_{C_2}^{x} \frac{C_1}{y_a^2}\,dt \\ y_a' & y_a' \int_{C_2}^{x} dt + \frac{C_1}{y_a} \end{vmatrix} = y_a' y_a \begin{vmatrix} 1 & \int_{C_2}^{x} \frac{C_1}{y_a^2}\,dt \\ 1 & \int_{C_2}^{x} \frac{C_1}{y_a^2}\,dt + \frac{C_1}{y_a y_a'} \end{vmatrix} =$$

$$y_a' y_a \begin{vmatrix} 1 & \int_{C_2}^{x} \frac{C_1}{y_a^2}\,dt \\ 0 & \frac{C_1}{y_a\, y_a'} \end{vmatrix} = C_1 \neq 0.$$

Dus $\quad W(x) \neq 0 \quad$ als $C_1 \neq 0$.

Volgens (3.5): is $y_a \sim \cos(kx + \frac{\beta_1}{2k}\log x) \sum_0^\infty \frac{a_v'}{x^v} + \sin(kx + \frac{\beta_1}{2k}\log x) \sum_0^\infty \frac{a_v''}{x^v}$ (5.1)

en $y_b \sim \cos(kx + \frac{\beta_1}{2k}\log x) \sum_0^\infty \frac{b_v'}{x^v} + \sin(kx + \frac{\beta_1}{2k}\log x) \sum_0^\infty \frac{b_v''}{x^v}$ (5.2)

We mogen nu iedere andere oplossing construeren met behulp van y_a en y_b en kiezen

$$y_c = C_3\, y_a + C_4\, y_5 \sim \cos(kx + \frac{\beta_1}{2k}\log x) \left\{ C_3 \sum_0^\infty \frac{a_v'}{x^v} + C_4 \sum_0^\infty \frac{b_v'}{x^v} \right\} +$$
$$+ \sin\left(kx + \frac{\beta_1}{2k}\log x\right) \left\{ C_3 \sum_0^\infty \frac{a_v''}{x^v} + C_4 \sum_0^\infty \frac{b_v''}{x^v} \right\}$$

We bepalen nu C_3 en C_4 zodanig, dat geldt:

$$C_3' a_v'' + C_4' b_v'' = a_v'$$
$$C_3' a_v' + C_4' b_v' \quad a_v''$$

Derhalve is $y_c \sim \sin\left(kx+\frac{\beta_1}{2k}\log x\right)\sum_0^\infty a_v' x^{-v} - \cos\left(kx+\frac{\beta_1}{2k}\log x\right)\sum_0^\infty a_v'' x^{-v}$ (5.5)

$$\text{en } y_a \sim \sin\left(kx+\frac{\beta_1}{2k}\log x\right)\sum_0^\infty a_v'' x^{-v} + \cos\left(kx+\frac{\beta_1}{2k}\log x\right)\sum_0^\infty a_v'' x^{-v} \qquad (5.6)$$

C_3 en C_4 zijn inderdaad te bepalen daar een oplossing (5.5) bestaat volgens (4.6) en (4.7). Volgens (3.5) zijn er twee oplossingen waarvan de som van de kwadraten juist de amplitude in het kwadraat is.

De bewering is nu dat (5.5) en (5.6) twee geschikte oplossingen zijn om de amplitude te bepalen. Immers beschouwen we:

$$y_a^2 + y_c^2 \sim \left\{\sum_0^\infty a_v' x^{-v}\right\}^2 + \left\{\sum_0^\infty a_v'' x^{-v}\right\}^2$$

dan kunnen we besluiten dat

$$A^2 = y_a^2 + y_c^2 \qquad (5.7)$$

Immers, als we de twee willekeurige oplossingen y_a en y_b nemen , vinden we in het algemeen nog storende sinus en cosinus termen in de uitdrukking

$$y_a^2 + y_b^2 .$$

<u>Voorbeeld</u>:

$$y'' + \left\{k^2 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right\} y = 0$$

Gevraagd de amplitude van

$$y_a = x^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kx)$$

Kennelijk is

$$y_c = x^{\frac{1}{2}} J_{-(l+\frac{1}{2})}(kx) .$$

Immers: $x^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kx) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(x-\frac{1}{2}(l+\frac{1}{2})\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x-\frac{1}{2}l\pi)$

$$x^{\frac{1}{2}} J_{-(l+\frac{1}{2})}(kx) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(x+\frac{1}{2}(l+\frac{1}{2})\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(x-\frac{1}{2}l\pi) .$$

Derhalve is

$$A^2 = x\left\{J^2_{l+\frac{1}{2}}(kx) + J^2_{-(l+\frac{1}{2})}(kx)\right\}$$

$$\text{en} \quad A = \frac{2}{\pi} .$$

6. <u>Differentiaalvergelijking van de amplitude en fase</u>.

We substitueren nu: (3.2) in (3.1) en vinden dan:

$$A'' + 2i\,A'P' + i\,AP'' - AP'^2 + A\varphi = 0 \qquad (6.1)$$

Dat geeft aanleiding tot de volgende differentiaalvergelijking

$$A'' - AP'^2 + A\varphi = 0 \qquad (6.2)$$

$$2A'P' - AP'^2 = 0 \qquad (6.7)$$

6.7 is direct te integreren: $P' = \frac{C_1}{A^2}$ (6.8)

6.2 wordt dan: $A'' = \frac{C^2}{A^3} - A.\varphi.$ (6.9)

De constante C is te bepalen als we de Amplitude in het ∞^e vastleggen. Nemen we b.v.

$A_\infty = \varepsilon_0$ $\quad \varepsilon_0$ constant,

$A'_\infty = 0$

Dan moet derhalve gelden: $0 = \frac{C^2}{\varepsilon_0^3} - \varepsilon_0 k^2 \longrightarrow \varepsilon_0^2 = k$

We merken nog op, dat wanneer de amplitude in het oneindige vastligt, deze bepaald is voor elke waarde van X.

7. Het gedrag van de amplitude voor $0 < x < \infty$.

De amplitude voldoet aan

$$A'' = \frac{C^2}{A^3} - A.\varphi \qquad (4.5)$$

We vermenigvuldigen beide leden met A' en integreren van ∞ naar x

$$\frac{d}{dx}\left(A'^2 + \frac{C^2}{A^2}\right) = -2\, AA'\varphi\,,$$

en na integratie:

$$A + \frac{C^2}{A^2}\Big|_\infty^X = -2\int_\infty^X AA'\varphi\, dx = -A^2\varphi\Big|_\infty^X + \int_\infty^X A^2.\varphi'\, dx.$$

Derhalve

$$A'^2(x) + \frac{C^2}{A^2(x)} - \frac{C^2}{A^2(\infty)} = -A^2(x)\varphi(x) + A^2_\infty\varphi_\infty + \int_N^X A^2\varphi'\, dx + \int_\infty^N A^2\varphi'\, dx \qquad (7.1)$$

We beschouwen eerst $\int_\infty^N A^2\varphi'\, dx$ welke asymptotisch gelijk is aan

$$\int_\infty^N A^2\varphi'\, dx \sim \int_\infty^N \left\{\varepsilon_0^2 + O\left(\tfrac{1}{X}\right)\right\}\left\{-\frac{B_1}{X^2} + O\tfrac{1}{X^3}\right\} dx = O\left(\tfrac{1}{X}\right)$$

Derhalve bestaat de integraal $\int_\infty^X A^2\varphi'\, dx$ mits $|A| < M$ in $0 < X < \infty$

De bewering is nu dat: de amplitude nergens gelijk aan nul kan worden:

Immers (7.1) is te schrijven als:

$$A'^2(x) + \frac{C^2}{A^2(x)} = \frac{C^2}{A^2_\infty} - A^2(x)\varphi(x) + A^2_\infty\varphi_\infty + \int_\infty^X A^2\varphi'\, dx.$$

Het rechterlid is begrensd als $A(x)$ begrensd is.

Zou $A(x) = 0$ worden, dan zou de som van twee positieve termen waarvan er een ∞ groot zou worden begrensd zijn. Doch dit is uitgesloten. Derhalve wordt A nergens $= 0$. in $0 < x < \infty$

$A(x)$ is altijd begrensd daar de oplossingen van

$$y'' + y\varphi = 0$$

steeds begrensd zijn mits $x \neq 0$

8. Het gedrag van de oplossingen van (3.1) in de oorsprong.

De te beschouwen differentiaalvergelijking is dus:

$$y'' + y\,(\beta_0 + \beta_1 x^{-1} + \dots + \beta_m x^{-m}) = 0 \tag{8.1}$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

We veronderstellen $\beta_m < 0 \qquad m > 2.$

We bepalen eerst de hoofdterm door

$$y'' + \beta_m x^{-m} y = 0 \tag{8.2}$$

te beschouwen.

Aan (8.2) voldoen $y = x^{\frac{1}{2}} Z_{\frac{1}{2-m}} \left\{ \frac{2i\sqrt{-\beta_m}}{2-m} x^{\frac{2-m}{2}} \right\}$ (8.3)

waarin Z een cylinderfunctie voorstelt.

De asymptotische oplossingen van (8.3) voor kleine x zijn resp.:

$$y_1 \sim C_1 x^{\frac{m}{4}} \cdot e^{-\frac{2}{2-m}\sqrt{-\beta_m}\, x^{\frac{2-m}{2}}}$$

en $$y \sim C_2 x^{\frac{m}{4}} e^{\frac{2}{2-m}\sqrt{-\beta_m}\, x^{\frac{2-m}{2}}}$$

Om aan de randvoorwaarden te kunnen voldoen moeten we de oplossing

$$y \sim C_3 x^{\frac{m}{4}} e^{-\frac{2}{2-m}\sqrt{-\beta_m}\, x^{\frac{2-m}{2}}}$$

nemen. $C_1; C_2; C_3$ zijn constanten.

Er zijn nu twee mogelijkheden die zinvol zijn om 8.1 te transformeren:

n.l. de substitutie: $y = e^{g(x)} . z$ waarbij $g(x)$ een bekende functie is, en

$y = e^{z}$ Riccati transformatie.

We zullen de Riccati transformatie voor het algemene geval gebruiken en in een meer speciaal geval zullen we de eerste transformatie toepassen.

Als we dus stellen $y = e^{z}$ gaat (8.1) over in

$$z'' + (z')^2 + \varphi = 0. \tag{8.4}$$

We proberen nu de reeks:

$$z = \frac{m}{4}\log x + \frac{2}{2-m}\sqrt{-\beta_m}\; x^{\frac{2-m}{2}} + \gamma_{2-\frac{m}{2}}\, x^{2-\frac{m}{2}} + \dots \tag{8.5}$$

We kunnen nu twee gevallen onderscheiden n.l. m = 2n en m = 2n+1. Het eerste geval zullen we nader bezien. Het tweede geval gaat analoog.

9. <u>m = 2n.</u>

(8.5) gaat dus over in:

$$z = \frac{n}{2}\log x + \frac{1}{1-n}\sqrt{-\beta_{2n}}\, x^{1-n} + \gamma_{2-n}x^{2-n} + \gamma_{3-n}x^{3-n} + \ldots + \gamma_{-1}x^{-1} + \gamma_0 + \gamma_1 x^{1} + \ldots \qquad (9.1)$$

We substitueren dit in de vergelijking (8.4).

Na enig gecijfer vinden we:

$$-\frac{n}{2}x^{-2} + \sum_{v=1}^{n-2} v(v+1)\gamma_{-v}x^{-v-2} + \sum_{0}^{\infty} k(k-1)\gamma_k x^{k-2} + \frac{n^2}{4}x^{-2} - n\sum_{v=1}^{n-2} v\gamma_{-v}x^{-v-2} - 2\sqrt{-\beta_{2n}}\sum_{v=1}^{n-2} v\gamma_{-v}x^{-v-n-1} + n\sqrt{-\beta_{2n}}\,x^{-n-1} +$$
$$\left\{\sum_{v=1}^{n-2} v.\gamma_{-v}x^{-v-1}\right\}^2 - 2\sum_{v=1}^{n-2} v\gamma_{-v}x^{-v-1}\sum_{0}^{\infty} k\gamma_k x^{k-1} + \left\{\sum_{0}^{\infty} k\gamma_k x^{k-1}\right\}^2 +$$
$$\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{2n-1}x^{-2n+1} = 0. \qquad (9.2)$$

Termen met x^{-2n} komen niet meer voor.

De coefficienten van x^{-2n+1} $: -2\sqrt{-\beta_{2n}}\,(n-2)\gamma_{-n+2} + \beta_{2n-1} = 0 \longrightarrow$

$$\gamma_{-n+2} = \frac{\beta_{2n-1}}{2(n-2)\sqrt{-\beta_{2n}}}$$

De coefficienten van x^{-2n+2} $: -2\sqrt{-\beta_{2n}}\,(n-3)\gamma_{-n+3} + (n-2)^2\gamma_{-n+2} + \beta_{2n-2} = 0$

enz. De coefficienten zijn ondubbelzinnig te bepalen.

In het algemeen is de gevonden reeks divergent. We zullen aan een meer speciaal geval laten zien dat de daarbij gevonden reeks niet convergent is.

10. <u>Meer speciaal geval:</u>

We veronderstellen dat in de functie $\varphi = \beta_0 + \beta_1 x^{-1} + \ldots + \beta_m x^{-m}$

$\beta_0 = a_0 \quad \beta_1 = 0 \quad \beta_2 = -a_2 \quad \beta_6 = a_6 \quad \beta_{12} = -a_{12} = \beta_m$ Verder zijn alle β's $=0$

$$a_0 > 0 \qquad a_2 > 0 \qquad a_6 > 0 \qquad a_{12} > 0.$$

We stellen nu $y = x^3\, e^{-\frac{1}{5}\sqrt{a_{12}}\,x^{-5}}\, g(x)$.

We substitueren deze oplossing in

$$y'' + y.\varphi = 0$$

en wederom na enig gereken vinden we:

$$g''(x) + 2g'(x)\left\{3x^{-1} + \sqrt{a_{12}}\,x^{-6}\right\} + g(x)\left\{a_0 + (6-a_2)x^{-2} + a_6 x^{-6}\right\} = 0. \qquad (10.1)$$

(10.1) heeft de gedaante $a_0\, g''(x) \cdot a\, g'(x) + a\, g(x) = 0$.
Noemen we de polen van a_i p_i, dan wordt de functie $P = p_i + n - i$
(n = orde van de differentiaalvergelijking).

$i = 0$: $P = 0 + 2 - 0 = 2$
$i = 1$: $P = 6 + 2 - 1 = 7$
$i = 2$: $P = 6 + 2 - 2 = 6$.

Hieruit volgt dat er $n-1 = 1$ oplossing, die door de oorsprong gaat is aan te wijzen van de vorm

$$g(x) = \sum_0^\infty c_k\, x^k \tag{10.2}$$

Zetten we (10.2) in (10.1) dan vinden we:

$$\sum_0^k k(k-1)c_k\, x^{k-2} + 6\, x^{-1} \sum_0^\infty k\, c_k\, x^{k-1} + 2\sqrt{a_{12}}\, x^{-6} \sum_0^\infty k c_k\, x^{k-1} +$$
$$+ a_0 \sum_0^\infty c_k\, x^k + (6-a_2) \sum_0^\infty c_k\, x^{k-2} + a_6 \sum_0^\infty c_k\, x^{k-6} = 0. \tag{10.3}$$

Nu gaan we de coefficienten van deze vergelijking na:

Coefficienten van x^{-7} $\equiv 0$

x^{-6} $C_1\, 2\sqrt{a_{12}} + C_0\, a_6 = 0$ C_0 onbepaald
x^{-5} $2\, C_2\, 2\sqrt{a_{12}} + C_1\, a_6 = 0$
x^{-4} $3\, C_3\, 2\sqrt{a_{12}} + C_2\, a_6 = 0$
x^{-3} $4\, C_4\, 2\sqrt{a_{12}} + C_3\, a_6 = 0$
x^{-2} $5\, C_5\, 2\sqrt{a_{12}} + a_6\, C_4 + (6-a_2)C_0 = 0$
x^{-1} $6\, C_6\, 2\sqrt{a_{12}} + C_5\, a_6 + (6-a_2)C_1 + 6\, C_1 = 0$.

De coefficienten van x^k :

$$(k^2 + 9\, k + 20 - a_2)C_{k+2} + 2\sqrt{a_{12}}\,(k+7)C_{k+7} + a_0\, C_k + a_6\, C_{k+6} = 0$$

Derhalve:

$$C_{k+7} = -\frac{a_0 C_k + (k^2+9k+20-a_2)C_{k+2} + a_6\, C_{k+6}}{2\sqrt{a_{12}}\quad (k+7)}$$

Als $a_2 < 6$ zijn alle coefficienten wisselend van teken. Verder is het mogelijk door de keuze van C_0 van af zekere k en n en daarop volgende k's

$$\left|C_{7+k+5n}\right| > \frac{1}{\left(2\sqrt{a_{12}}\right)^n} \left|\Gamma\left(\frac{k+7+5n}{5}\right)\right| \quad \text{te kiezen.}$$

Doordat de termen alternerend zijn hebben C_k en C_{k+2} hetzelfde teken waardoor:

$$\left|C_{k+7}\right| > \left|\frac{(k^2+9k+20-a_2)C_{k+2}}{2\sqrt{a_{12}}\,.(k+7)}\right| > \frac{k+2}{2\sqrt{a_{12}}}\left|C_{k+2}\right| =$$

$$\frac{\frac{k+2}{5}}{2\sqrt{a_{12}}}\left|C_{\ }\right| + \frac{\frac{k+2}{5}\cdot 4}{2\sqrt{a_{12}}}\left|C_{k+2}\right| > \frac{\frac{k+2}{5}}{2\sqrt{a_{12}}}\left|C_{k+2}\right|$$

Evenzo geldt $\left|c_{k+7+5n+5}\right| > \frac{(k+5+5n-2)}{2\sqrt{a_{12}}} \left|c_{k+5+5n+2}\right| >$ (inductie veronderstelling)

$$\frac{(k+5+5n+2)}{2\sqrt{a_{12}}} \; \frac{1}{(2\sqrt{a_{12}})^{n}} \; \Gamma\left(\frac{k+5+5n+2}{5}\right) =$$

$$\frac{1}{(2\sqrt{a_{12}})^{n+1}} \Gamma\left(\frac{k+7+5n+5}{5}\right)$$

zodat we dus kunnen besluiten dat de formule voor iedere n en k geldt.

Nu is echter $\dfrac{\Gamma\left(\frac{(k+7+5n+5)}{5}\right)}{(2\sqrt{a_{12}})^{n}}$ onbegrensd toenemend met onbegrensd toenemende n. De reeks divergeert dus.

11. Gedrag van de amplitude en fase in de oorsprong.

We hebben dus gevonden dat het gedrag in de oorsprong van de oplossing van (3.2) met $y(0)= y'(0)= 0$ en $\varphi = a_0 - a_2 x^{-2} + a_6 x^{-6} - a_{12} x^{-12}$.

gegeven wordt door: $y \sim C\, x^3\, e^{-\frac{1}{5}\sqrt{a_{12}}\, x^{-5}}$. C constant.

Nu was de amplitude de wortel uit de som van de kwadraten van 2 fundamentele oplossingen, derhalve $A \sim C_1\, x^3\, e^{\frac{1}{5}\sqrt{a_{12}}\, x^{-5}}$.

De fase wordt dus: $P = \int_0^x \frac{1}{A^2}\, dx \sim \frac{1}{C_1^2} \int_0^x x^{-6}\, e^{-\frac{2}{5}\sqrt{a_{12}}\, x^{-5}}\, dx =$

$$\frac{1}{C_1^2\, 2\sqrt{a_{12}}}\, e^{-\frac{2}{5}\sqrt{a_{12}}\, x^{-5}}.$$

De fase en amplitude moeten voldoen aan:

$$y = A \sin P \sim AP \sim C_1 x^3\, e^{\frac{1}{5}\sqrt{a_{12}}\, x^{-5}}\; \frac{1}{C_1^2}\; \frac{1}{2\sqrt{a_{12}}}\, e^{-\frac{2}{5}\sqrt{a_{12}}\, x^{-5}}.$$

Dus $y \sim \dfrac{1}{C_1\, 2\sqrt{a_{12}}}\, x^3\, e^{-\frac{1}{5}\sqrt{a_{12}}\, x^{-5}}$, hetgeen inderdaad de juiste gedaante is.

12. Een asymptotische formule voor het faseverschil.

We beschouwen de volgende differentiaalvergelijking

$$y'' + \left\{k^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} + u(x)\right\} y = 0. \qquad (12.1)$$

waarin $u(x)= a_3\, x^{-3} + \ldots + a_m\, x^{-m}$ met $y(0)=y'(0)= 0$.

Als $u(x) \equiv 0$, kunnen we een oplossing direct neerschrijven:

n.l. $$u = -x^{\frac{1}{2}}\, J_{(l+\frac{1}{2})}(kx) \sim \sin(kx - \tfrac{1}{2}\, l\pi) \qquad (12.2)$$

Indien $u(x) \neq 0$. Stellen we de oplossing van (12.1)

$$y \sim \sin\left(k\,x - \tfrac{1}{2}\, l\pi + \eta_k(l)\right) \qquad (12.3)$$

$\eta_k(l)$ is het faseverschil tussen de oplossingen (12.2) en (12.3).

Laat G(x) een oplossing zijn van

$$y'' + y\left(k^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} + U(x)\right) = 0 \qquad y(0)=y'(0)=0.$$

en stel nog dat $g = \left(\frac{\pi k}{2} x\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kx)$.

Stel nu $G = g + \Phi(x)$.

$$\therefore \quad \Phi'' + \left\{k^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} + U(x)\right\}\Phi = -g\,U(x). \tag{12.4}$$

Stellen we dan nog: $\Phi(x) = g.\varphi(x)$.

Dan volgt er:

$$2g'\varphi' + g\varphi'' + u(x)\,g.\varphi + g\,.\,u(x) = 0$$

of:

$$\frac{1}{g}\,\frac{d}{dx}\left(g^2\varphi'\right) + g\,u(x)\left(1+\varphi\right) = 0. \tag{12.5}$$

(12.5) is echter wat eleganter te schrijven:

$$\frac{d}{dx}\left(g^2\varphi'\right) = g.G.u(x)$$

en na integratie:

$$g^2\varphi' = -\int_0^x g\,G.u(r)dr$$

$$\therefore \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{g^2}\int_0^x g\,G\,u(r)dr\;.$$

Nu is $g \sim \sin(kx - \frac{l\pi}{2})$, verder is $g\,G\,u(x)$ van de orde $\frac{1}{x^5}$ voor grote x.

Derhalve is $\frac{d\varphi}{dx} \sim \frac{1}{\sin(kx-\frac{l\pi}{2})}\int_0^\infty g\,G.u(r)dr$, en na integratie:

$$\varphi \sim \frac{1}{k}\,\mathrm{cotg}(kx - \frac{l\pi}{2})\int_0^\infty g\,G\,u(r)dr + C$$

We kunnen nu ook G berekenen:

$$G \sim \sin\left(kx - \frac{l\pi}{2} + \eta_k(l)\right) = \sin(kx - \frac{l\pi}{2}) + \frac{1}{k}\cos(kx - \frac{l\pi}{2})\int_0^\infty g\,Gu(r)dr + C\sin(kx - \frac{l\pi}{2}) \tag{12.6}$$

In (12.6) stellen we dan: $1+c = A\cos\delta$

$$\frac{1}{k}\int_0^\infty g\,G\,u(r)dr = A\sin\delta\;.$$

Hierdoor is C bepaald, immers A moet gelijk aan 1 zijn.

Derhalve is:

$$\eta_k(l) = \mathrm{bg}\sin\frac{1}{k}\int_0^\infty g\,G\,u(x)dx. \tag{12.7}$$

13. Numerieke berekening van de faseverschillen.

Bij de numerieke berekening van de faseverschillen gaan we uit van de vergelijkingen die gelden voor de amplitude en fase.

$$A'' = \frac{c^2}{A^3} - A.\varphi .$$

Hierbij was:

$$\varphi = k^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{16\pi^2}{\Lambda^2}\left(\frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^{12}}\right). \quad k, l, \Lambda\text{: constanten}$$

Deze differentiaalvergelijking integreren we vanuit het ∞^+. We nemen daartoe de amplitude = 1. Dit is toegestaan daar we homogene randvoorwaarden hebben. Immers, wanneer y een oplossing van de vergelijking is, voldoet ook cy.

We bepalen de asymptotische oplossing van de vergelijking

$$y'' + y\varphi = 0,$$

door te nemen de oplossingen van

$$y'' + y\left\{k^2 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right\} = 0.$$

Hieraan voldoen $x^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kx)$ en $x^{\frac{1}{2}} J_{-(l+\frac{1}{2})} k(x)$.

We eisen dus dat $A_\infty = 1$, waardoor

$$A^2 = \frac{\pi}{2} x \left\{ J^2_{l+\frac{1}{2}}(kx) + J^2_{-(l+\frac{1}{2})} kx \right\}.$$

We bepalen nu 2 waaarden van A, de z.g. startwaarden.
Daarna integreren we de differentiaalvergelijking numeriek totdat A zo groot geworden is dat $\frac{1}{A^2}$ klein is in de precisie waarmee we rekenen.

Daarna bepalen we de fase met behulp van:

$$P = \int_0^x \frac{1}{A^2}\, dx .$$