STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-011

De stelling van Minkowski-Hlawka

Voordracht in de serie
"Actualiteiten"

Dr. C.G. Lekkerkerker

1956

Rapport ZW 1956-011

Voordracht in de serie Actualiteiten

door

Dr C.G. Lekkerkerker

op zaterdag 28 april 1956

De stelling van Minkowski-Hlawka

We beginnen met een inleidende beschouwing. Zij M een begrensd lichaam in de Euclidische ruimte $R_n (n \geq 2)$, met volume $V=V(M)$. Zij O de oorsprong en zij Λ een rooster in R_n, d.w.z. de verzameling der punten

$$x = u_1 a^{(1)} + u_2 a^{(2)} + \ldots + u_n a^{(n)},$$

waar $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de gehele getallen doorlopen en $\{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}\}$ een stelsel van n onafhankelijke punten is. Met Π zullen we aangeven de fundamentaalcel van Λ, d.i. de verzameling der punten x van de gedaante

$$x = \xi_1 a^{(1)} + \xi_2 a^{(2)} + \ldots + \xi_n a^{(n)},$$

waarin $0 \leq \xi_i < 1$ $(i=1,2,\ldots,n)$. De inhoud van Π, die gelijk is aan $|\det (a^{(i)}_j)|$ $(a^{(i)} = (a^{(i)}_1, a^{(i)}_2, \ldots, a^{(i)}_n))$ en de determinant van het rooster Λ heet, stellen we voor door $d(\Lambda)$.

Zij p een willekeurig punt van R_n en stellen we door $p+\Lambda$ voor de verzameling der punten $p+x$, $x \in \Lambda$. Zij $A(p)$ het aantal punten van $p+\Lambda$ in M. Dit aantal zal, gemiddeld genomen, des te groter zijn naarmate het volume van M groter is. Er geldt:

$$\overline{A(p)} = V/d(\Lambda), \tag{1}$$

waarbij men $\overline{A(p)}$ kan definiëren d.m.v.

$$\overline{A(p)} = \frac{1}{d(\Lambda)} \int_{\Pi} A(p)dp \tag{2}$$

(bedenk dat $A(p)$ invariant is voor translaties van R_n die Λ invariant laten). Formule (1) wordt gemakkelijk gevonden als men de karakteristieke functie van M invoert.

Uit (1) volgt: is $V > d(\Lambda)$, dan is er een punt $p=p^{(0)}$ met $A(p^{(0)}) > 1$. Dit is de stelling van Blichfeldt. Anderzijds volgt uit (1) ook: is $V < d(\Lambda)$, dan is er een punt $p^{(1)}$ met $A(p^{(1)}) < 1$, dus $A(p^{(1)})=0$, d.w.z. $p^{(1)}+\Lambda$ heeft géén punt in M.

De verzameling $p^{(1)}+\Lambda$ zal i.h.a. het punt 0 niet bevatten, is een z.g. inhomogeen rooster (Eng.grid). Het rooster Λ heet homogeen. De stelling van Minkowski-Hlawka geeft uitsluitsel over de volgende vraag: bestaat er een constante $c>0$, zó dat, als $V=V(M)<c$, er steeds een homogeen rooster Λ is, met determinant 1, dat géén punt in M heeft. Omdat steeds $0\in\Lambda$, zullen we in elk geval de eis omtrent Λ nog als volgt moeten rectificeren: Λ heeft géén punt $\neq 0$ in M.

Zij M een begrensd lichaam in R_n. Zij $\mathcal{L}$ een willekeurig gekozen homogeen (n-1)-dimensionaal rooster in het vlak $x_n=0$ en zij α het positieve getal met $\alpha\, d(\mathcal{L})=1$. Dan heeft elk rooster Λ, voortgebracht door $\mathcal{L}$ en een punt g van de gedaante $g=(g_1,g_2,\ldots,g_{n-1},\alpha)$, determinant 1. Zij $A(g)$ het aantal punten van Λ, dat tot M behoort maar niet in het vlak $x_n=0$ ligt. We laten nu g variëren, bij vaste $\mathcal{L}$ en α. De punten die bijdragen tot $A(g)$ liggen in de vlakken $x_n=\alpha t$, waarbij t de gehele getallen $\neq 0$ doorloopt. Geheel analoog aan (1), met analoge betekenis voor $\overline{A(g)}$, kan men bewijzen:

$$(3)\qquad \overline{A(g)}=\frac{1}{d(\mathcal{L})}\sum_{t=-\infty,\,t\neq 0}^{\infty} v(\alpha t)=\alpha\sum_{t=-\infty,\,t\neq 0}^{\infty} v(\alpha t),$$

waarbij $v(\alpha t)$ het (n-1)-dimensionale volume is van de doorsnee van M en het vlak $x_n=\alpha t$. In de som in (3) komen slechts eindig veel termen $\neq 0$ voor, omdat M begrensd ondersteld is.

Thans laten we $\mathcal{L}$ variëren, zodanig dat $\alpha\to 0$. We kunnen dan bereiken:

1^o. $\mathcal{L}$ heeft geen punt $\neq 0$ in M (want $d(\mathcal{L})\to\infty$)

2^o. $\alpha\sum_{t=-\infty,\,t\neq 0}^{\infty} v(\alpha t)<V+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, omdat de uitdrukking links tot V nadert voor $\alpha\to 0$.

Voorts kunnen we, wegens (3), $g=g^{(o)}$ zó kiezen dat $A(g^{(o)})\leq\alpha\sum v(\alpha t)$. Is dus $V<1$ en in 2^o het getal ε geschikt gekozen, dan is $A(g^{(o)})<1$, dus $A(g^{(o)})=0$. In verband met 1^o betekent dit dat Λ geen punt $\neq 0$ in M heeft. Dit geeft de volgende

Stelling 1. Is $V<1$, dan is er een rooster Λ met determinant 1, dat geen punt $\neq 0$ in M heeft.

Is het lichaam M symmetrisch t.o.v. 0, dan is de functie $v(\alpha t)$ even, en dus het rechterlid van (3) gelijk aan $2\alpha\sum_{t=1}^{\infty} v(\alpha t)$. Ook is $A(g)$ even, dus $A(g)=0$, als maar $A(g)<2$. Dan mag in stelling 1 de voorwaarde $V<1$ vervangen worden door $V<2$.

Is M een sterlichaam t.o.v. 0, dan hoeft men slechts te eisen dat er geen primitieve roosterpunten van Λ in M liggen (een punt $x\in\Lambda$ met $x\neq 0$ heet primitief roosterpunt, als het segment 0x geen verdere punten van Λ bevat). Men kan b.v. afleiden, door toepassing van een iets gegeneraliseerde vorm van stelling 1:

Stelling 2. Zij S een begrensd sterlichaam, symmetrisch t.o.v. O. Zij $V(S) < 2\zeta(n)$, waarin $\zeta(n)=1+2^{-n}+3^{-n}+\dots$. Dan is er een rooster Λ met determinant 1, dat geen punt $\neq 0$ in S heeft.

Deze stelling is als bewering uitgesproken door Minkowski [1]) en in 1943 voor het eerst streng bewezen door Hlawka [1] . Later zijn verschillende andere bewijzen gegeven (zie b.v. de literatuuropgaven in [5]). Een zeer kort bewijs is te vinden in Cassels [2] . In stelling 2 kan men zich gemakkelijk ontdoen van de beperkende onderstelling dat S begrensd is (zie Rogers [3] , p.1000,r.9).

Van nu af aan onderstellen we dat M symmetrisch t.o.v. O en convex is. In dat geval is, krachtens de stelling van Brunn-Minkowski [2]), $\sqrt[n-1]{v(a)}$ een concave functie van a (a reëel, V(a)= volume doorsnee van M en $x_n=a$). Het is ook een even functie van a, omdat M symmetrisch t.o.v. O is. Het gevolg is dat het rechterlid van (3) betrekkelijk klein is ook als α niet dicht bij 0 ligt. Davenport en Rogers [4] leiden een hulpstelling af die als volgt geformuleerd kan worden:

Hulpstelling 1. Zij $0 < \beta < 1$. Dan is $\sum_{t=1}^{\infty} v(\alpha t) \leq \beta v(0)$, als we nemen

$$\alpha = \frac{V}{2v(0)} \cdot \frac{n(1-\beta^{1/(n-1)})}{1-\beta^{n/(n-1)}} . \tag{4}$$

Deze hulpstelling maakt het mogelijk een iets scherper resultaat dan stelling 2 af te leiden, en wel door volledige inductie naar n. Laten we, voor $m \geq 2$, met c_m het grootste positieve getal aangeven met de eigenschap:

bij elk convex lichaam M in R_m, symmetrisch t.o.v. O, is er een rooster Λ in R_m met determinant $d(\Lambda) \leq V(M)/c_m$ dat geen punt $\neq 0$ in het inwendige van M heeft.

Stelling 2 is dan gelijkwaardig met de betrekking $c_n \geq 2\zeta(n)$.

Beschouwen we een O-symmetrisch, convex lichaam M in R_n. Krachtens de definitie van c_{n-1} is er een (n-1)-dimensionaal rooster $\mathcal{L}$ in het vlak $x_n=0$ met determinant $d(\mathcal{L})=\frac{v(0)+\varepsilon}{c_{n-1}}$ $(\varepsilon > 0)$ dat geen punt $\neq 0$ in M heeft. We kiezen nu $\beta = 1/c_{n-1}$ en bepalen daarbij α volgens (4). Op grond van (3) is er een punt $g^{(o)}=(g_1,g_2,\dots,g_{n-1},\alpha)$ met $A(g^{(o)}) \leq \frac{2}{d(\mathcal{L})} \sum_{t=1}^{\infty} v(\alpha t)$. Wegens hulpstelling 1 is dus $A(g^{(o)}) \leq \frac{2}{d(\mathcal{L})} \beta v(o) = \frac{2v(o)}{v(o)+\varepsilon} < 2$, dus $A(g^{(o)})=0$. Het rooster Λ , voort-

----

1) Zie H. Minkowski, Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite, Gesammelte Abh.I, p.270.

2) Zie T. Bonnesen-W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Chelsea (1947), p.71 en 88.

gebracht door $\mathcal{K}$ en het punt $g^{(o)}$, heeft dus geen punt $\neq 0$ in M. Daarbij is $d(\Lambda)=\alpha d(\mathcal{K})=(1+\frac{\varepsilon}{v(o)})\frac{V}{2}\cdot\frac{n(c_{n-1}^{1/(n-1)}-1)}{c_{n-1}^{n/(n-1)}-1}$. Hieruit volgt (zie [4]):

Stelling 3. Er geldt $\quad c_n \geq \frac{2}{n}\,\frac{c_{n-1}^{n/(n-1)}-1}{c_{n-1}^{1/(n-1)}-1}$.

Davenport en Rogers leiden uit stelling 3 af:

$$\liminf_{n\to\infty} c_n \geq c, \tag{5}$$

waarbij $c>1$ en $c \log c = 2(c-1)$ $\qquad (c=4.921\ldots)$.
Uitgaande van een schatting voor c_2 kan men afleiden dat zelfs $c_n > c$ voor $n \geq 5$ (zie [5]). We hebben dus een verscherping van stelling 2 verkregen.

In het bewijs van stelling 1 moest het daarin optredende getal α dicht bij 0 worden gekozen, en dus $d(\mathcal{K})$ zeer groot, om te kunnen voldoen aan de eisen 1^o en 2^o. Als gevolg heeft het gevonden rooster een zeer verwrongen vorm, vergeleken met het rooster van de punten met gehele coördinaten. Precieser gezegd: er is geen constante k, zó dat men een rooster met de gewenste eigenschappen verkrijgt, dat een basis heeft die bevat is in de kubus $|x_i| < k$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Letten we nu op de grootte van het getal α, gebruikt in het bewijs van stelling 3. Voor $0<\beta<1$ is

$$1 < \frac{n(1-\beta^{1/(n-1)})}{1-\beta^{n/(n-1)}} < n$$

wegens $\frac{1-\beta^{n/(n-1)}}{n(1-\beta^{1/(n-1)})} = \frac{1}{n}\,(1+\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^{n-1}),\ \gamma=\beta^{1/(n-1)}$.

Ligt nu maar $V/v(0)$ tussen redelijke grenzen, dan ligt ook α tussen redelijke grenzen. Dan is enerzijds $d(\mathcal{K})$ niet te groot en anderzijds α niet te groot; op die manier mogen we hopen door volledige inductie een niet te verwrongen rooster Λ met de gewenste eigenschappen te vinden. We gaan nu deze gedachtegang nader uitvoeren.

Zij κ_m het volume van de eenheidsbol in R_m. Laten r_m en s_m niet te veel van 1 afwijkende positieve getallen zijn met de volgende eigenschap: is M een O-symmetrisch, convex lichaam in R_m, dan is er een (m-1)-dimensionaal hypervlak H_{m-1} door O, zó dat

$$V(H_{m-1}\cap M) = \theta_m \kappa_{m-1}\cdot\left\{V(M)/\kappa_m\right\}^{(m-1)/m}, \quad r_m \leq \theta_m \leq s_m .$$

Men merke op dat, ingeval M een bol is, voor elke keuze van H_{m-1} geldt: $V(H_{m-1}\cap M)=\kappa_{m-1}\cdot\left\{V(M)/\kappa_m\right\}^{(m-1)/m}$. Uitgaande van een O-symmetrisch, convex lichaam M in R_n kiezen we nu achtereenvolgens $H_n=R_n$, H_{n-1}, H_{n-2}

als deelruimte van H_{n-1}, enz., zó dat, als $H_m \cap M = M_m$,

(6) $$V(M_{m-1}) = \Theta_m K_{m-1} \cdot \{ V(M_m)/K_m \}^{(m-1)/m}, \quad r_m \leqslant \Theta_m \leqslant s_m, \quad (m=n,n-1,\ldots,2)$$

We kunnen in elk geval nemen $\Theta_2=1$. Door een rotatie in R_n uit te voeren kunnen we bereiken dat H_m het vlak $x_{m+1}=x_{m+2}=\ldots=x_n=0$ is.

Met de bewijsmethode van stelling 3 kan men door volledige inductie naar m, de volgende bewering aantonen (vgl. [5]):

<u>Bewering</u>. Laten de getallen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ gedefinieerd zijn als volgt:

$$d_1=2, \quad d_2=3, \quad d_m = \frac{2}{m} \frac{d_{m-1}^{\,m/(m-1)}-1}{d_{m-1}^{\,1/(m-1)}-1} \quad (m=3,4,\ldots,n).$$

Dan is er een stelsel van n onafhankelijke punten $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}$, zodanig dat $a^{(i)} \in H_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ en dat voor de roosters Λ_m, voortgebracht in H_m door $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$, geldt:

1. Λ_m heeft geen punt $\neq 0$ in het inwendige van M_m
2. $d(\Lambda_m) = V(M_m)/d_m$
3. het punt $a^{(m)}$ is bevat in het blok W_m, bepaald door:

$$|x_1| \leqslant \tfrac{1}{2} V(M_1), \quad |x_i| \leqslant \frac{d_{i-1}}{d_i} \cdot \frac{V(M_i)}{V(M_{i-1})} \qquad (i=2,3,\ldots,m).$$

Passen we dit speciaal toe met m=n, dan vinden we: er is een rooster Λ met determinant $V(M)/d_n$, dat geen punt $\neq 0$ in het inwendige van M heeft en dat een basis heeft bevat in het blok

$$|x_1| \leqslant \tfrac{1}{2} V(M_1), \quad |x_i| \leqslant \frac{d_{i-1}}{d_i} \frac{V(M_i)}{V(M_{i-1})} \quad (i=2,3,\ldots,n).$$

Men kan laten zien dat d_i tot c nadert (zie p.2) voor $i \to \infty$. Dus $d_{i-1}/d_i \to 1$ voor $i \to \infty$. Verder is, krachtens (6),

(7) $$\begin{cases} \dfrac{V(M_i)}{V(M_{i-1})} = \dfrac{K_i^{(i-1)/i}}{\Theta_i K_{i-1}} \{V(M_i)\}^{1/i}, \\ V(M_i) = \Theta_{i+1} \Theta_{i+2}^{\,i/(i+1)} \Theta_{i+3}^{\,i/(i+2)} \ldots \Theta_n^{\,i/(n-1)} K_i (V(M)/K_n)^{i/n}. \end{cases}$$

Konden we bewijzen dat we kunnen nemen $\Theta_i=1$ $(i=1,2,\ldots,n)$, dan zouden we vinden $V(M_i) = K_i (V(M)/K_n)^{i/n}$, $V(M_i)/V(M_{i-1}) = \frac{K_i}{K_{i-1}} (V(M)/\ _n)^{1/n}$. De genoemde basis van Λ zou dan bevat zijn in de bol

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 < b \log n \,.\, (V(M)/K_n)^{2/n},$$

waarin b een zekere constante is die niet van n afhangt. Immers $K_i/K_{i-1} \sim \sqrt{2\pi/i}$.

Maar de pogingen om aan te tonen dat men de hypervlakken H_i zó kan kiezen dat $\Theta_i=1$, d.w.z. $V(H_{i-1}\cap M)=\kappa_{i-1}\{V(H_i\cap M)/\kappa_i\}^{(i-1)/i}$ $(i=2,3,\dots,n)$, stuiten op moeilijkheden. Om redenen van homogeniteit is het geen bezwaar te onderstellen $V(M_i)=V(H_i\cap M)=\kappa_i$. Dan heeft M_i hetzelfde (i-dimensionale) volume als de i-dimensionale eenheidsbol. Zij x' een randpunt van M_i op maximale afstand van O. Dan is $|x'|\geq 1$. Zij H_{i-1} het (i-1)-dimensionale hypervlak door O, loodrecht op de vector x'. Dan is $V(M_i)=\kappa_i\geq \frac{2}{i}\,|x'|\;.\;V(H_{i-1}\cap M)$, dus $V(M_{i-1})\leq \frac{1}{2}i\,\kappa_i$. Dus $\Theta_i\leq\frac{1}{2}i\,\kappa_i$. Men kan verder een randpunt x" van M_i op minimale afstand van O beschouwen, in dat punt een steunvlak aan M_i aanbrengen en H_{i-1} evenwijdig aan dat steunvlak kiezen. Men vindt dan $V(M_i)\leq 2\,|x''|\,.V(H_{i-1}\cap M)$, dus $V(M_{i-1})\geq\frac{1}{2}\kappa_i$. Dus $\Theta_i\geq\frac{1}{2}\kappa_i$. Samenvattend hebben we

$$(8)\qquad \tfrac{1}{2}\kappa_i\leq\Theta_i\leq\tfrac{1}{2}i\,\kappa_i \qquad (i=2,3,\dots)$$

Door toepassing van de ongelijkheid van Hölder kan men (8) verscherpen. Voor een willekeurige eenheidsvector x geven we met f(x) aan de lengte van het in M bevatte segment van de halfrechte vanuit O die door het punt x gaat: f(x) is het positieve getal λ, waarvoor λx op de rand van M ligt. Verder geven we met h(x) aan het (n-1)-dimensionale volume van $M\cap\Pi_x$, waarin Π_x het (n-1)-dimensionale hypervlak door O is dat loodrecht staat op de vector x. We kunnen gemakkelijk V(M) en h(x) uitdrukken m.b.v. de functie f(x). Toepassing van Hölder levert nu (zie [5]): is $V(M)=\kappa_n$, dan is

$$(9)\qquad \left[\frac{1}{\omega_n}\int\{h(x)\}^{n/(n-1)}dx\right]^{(n-1)/n}\leq\kappa_{n-1};$$

hierbij wordt de integratie uitgestrekt over de rand van de eenheidsbol en is ω_n de oppervlakte van die eenheidsbol. Formule (9) zegt dat een zekere middelwaarde van h(x) ten hoogste κ_{n-1} is. We kunnen dus Π_x zó kiezen dat $V(\Pi_x\cap M)\leq\kappa_{n-1}$, ingeval $V(M)=\kappa_n$. Dus is $\Theta_n\leq 1$. Dus kan (8) verscherpt worden tot:

$$(10)\qquad \tfrac{1}{2}\kappa_i\leq\Theta_i\leq 1 \quad (i=2,3,\dots).$$

Uit (7), (10) en de hierboven aangetoonde bewering kan men de volgende stelling afleiden:

Stelling 4. Zij M een O-symmetrisch, convex lichaam in R_n met volume V. Zij κ_n het volume van de eenheidsbol en zij $d_2=3$, $d_m=$

$$=\frac{2}{m}\cdot\frac{d_{m-1}^{\,m/(m-1)}-1}{d_{m-1}^{\,1/(m-1)}-1}$$

(m=3,4,...). Dan is er een rooster Λ met de volgende eigenschappen:

1. Λ heeft geen punt $\neq 0$ in het inwendige van M
2. Λ heeft determinant $d(\Lambda)=V/d_n$
3. Λ heeft een basis die na een geschikte rotatie om O bevat is in de kubus $|x_i|<b\,(V/\kappa_n)^{1/n}$ $(i=1,2,\dots,n)$, waar b een vaste, niet

van n afhangende constante is.

Men mag b.v. nemen b=2.13. Voor de getallen d_m geldt: $\lim_{m\to\infty} d_m = c = 4.921\ldots$, $d_m > c$ voor $m \geq 6$. Uit eigenschap 3 volgt de iets zwakkere bewering

3'. Λ heeft een basis bevat in de bol om O met straal $b_1 n V^{1/n}$, waarin b_1 een constante is die niet van n afhangt.

Literatuur

1. E. Hlawka, Zur Geometrie der Zahlen, Math.Zeitschrift 49, 285-312 (1943).
2. J.W.S. Cassels, A short proof of the Minkowski-Hlawka theorem, Proc.Cambridge Philos.Soc.49, 165-166 (1953).
3. C.A. Rogers, Existence theorems in the geometry of numbers, Ann.of Math.(2), 48, 994-1002 (1947).
4. H. Davenport-C.A. Rogers, Hlawka's theorem in the geometry of numbers, Duke Math.J. 14, 367-375 (1947).
5. C.G. Lekkerkerker, On the Minkowski-Hlawka theorem, Proc.Kon.Ned. Ak.v.Wet. (verschijnt binnenkort).