STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1957-011

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Dr. C.G. Lekkerkerker

25 mei 1957

Een eigenschap van kwadratische getallen

MC

1957

Een eigenschap van kwadratische getallen

door

Dr C.G. Lekkerkerker

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

25 mei 1957

Zij θ een vast, positief, irrationaal getal. Er zijn verschillende stellingen die handelen over de benadering van θ door rationale getallen p/q. Zo zegt een klassieke stelling van Hurwitz dat er oneindig veel stellen natuurlijke getallen p,q zijn, zodanig dat

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}.q^2}$$

(hierbij kan in het algemeen de constante $\sqrt{5}$ niet vergroot worden). Anders gezegd: er zijn oneindig veel stellen natuurlijke getallen p,q, zodanig dat $q^2(\theta-p/q)$ een getal is in het interval $(-1/\sqrt{5},1/\sqrt{5})$. In het volgende zullen we met $J(\theta)$ aangeven de verzameling van de getallen van de vorm

(1) $\qquad q^2(\theta-p/q) \qquad$ (p,q natuurlijke getallen).

En we zullen, in het voetspoor van Cugiani [1] , de verdeling van $J(\theta)$ over de gehele reële as, niet slechts in de buurt van het punt 0, beschouwen. Dit zal leiden tot een nieuwe karakteristieke eigenschap van de kwadratische getallen.

Krachtens de genoemde stelling van Hurwitz liggen steeds oneindig veel gehele getallen van $J(\theta)$ in het interval $(-1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. Sluit men bepaalde getallen uit, dan kan dit interval verkleind worden. Uit de theorie van de kettingbreuken valt gemakkelijk de volgende stelling 1 af te leiden (zie [1]):

Stelling 1. Het punt 0 is dan en slechts dan verdichtingspunt van $J(\theta)$, als de wijzergetallen van de regelmatige kettingbreuk

(2) $$\theta = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

niet begrensd zijn.

We leiden uit stelling 1 meteen een conclusie voor de verdeling van $J(\theta)$ op de reële as af. Uit de vorm der getallen (1) volgt: als $\alpha \in J(\theta)$ en k een natuurlijk getal is, dan is ook $k^2\alpha \in J(\theta)$. Uit stelling 1 volgt dan: zijn de wijzergetallen in (2) niet begrensd, dan is $J(\theta)$ overal dicht op de halfrechte van de positieve getallen of op de halfrechte van de negatieve getallen. Interessant is dus slechts het geval dat de wijzergetallen a_n begrensd zijn.

We zullen de verzameling van de verdichtingspunten van $J(\theta)$ aangeven met $J'(\theta)$. Dan hebben we de volgende

Stelling 2. De verzameling $J'(\theta)$ is dan en slechts dan discreet als θ een kwadratisch getal is.

Bovenstaande stelling geeft ons een nieuwe karakteristieke eigenschap van de kwadratische getallen, van geheel andere vorm dan het bekende criterium van Lagrange:

> De regelmatige kettingbreuk waarin een getal θ ontwikkeld kan worden is dan en slechts dan periodiek als θ een kwadratisch getal is.

Overigens zullen we bij het bewijs van stelling 2 gebruik maken van het criterium van Lagrange.

Bewijs van stelling 2. Krachtens stelling 1 mogen we zonder bezwaar onderstellen dat de wijzergetallen a_n in de kettingbreuk voor θ begrensd zijn. Zij dus

$$(3) \qquad 1 \leq a_n \leq k \quad \text{voor } n=1,2,\dots,$$

waarbij k een zeker natuurlijk getal is. We verdelen nu het bewijs in 4 punten. Eerst zullen we twee hulpresultaten bespreken; daarna zullen we achtereenvolgens het voldoende en het nodig zijn van de voorwaarde bespreken.

1. Bekend is dat p/q een naderende breuk is van θ, indien $|q^2(p/q-\theta)| < \frac{1}{2}$ is. Deze eigenschap kan als volgt gegeneraliseerd worden (zie [2]):

Hulpstelling 1. Laten p_0/q_0, p_1/q_1, $p_2/q_2,\dots$ de naderende breuken van θ zijn. Zij γ een positief getal en laten p en q twee natuurlijke getallen zijn met

$$|q^2(p/q-\theta)| < \gamma, \qquad |p/q-\theta| < \frac{1}{k+2}.$$

Dan zijn er een index n en twee gehele getallen a,b, zó dat

$$p=ap_{n-1}+bp_{n-2}, \qquad q=aq_{n-1}+bq_{n-2},$$
$$0 \leq b \leq a \leq c(k,\gamma) = 2\sqrt{\gamma(k+2)^3}.$$

Op grond van deze hulpstelling ligt het voor de hand naast $J(\theta)$ de verzamelingen $J_{a,b}(\theta)$ in te voeren, bestaande uit de getallen

$$(4) \qquad \zeta_n^{(a,b)} = (a\, q_{n-1}+b\, q_{n-2})^2\left(\frac{a\, p_{n-1}+b\, p_{n-2}}{a\, q_{n-1}+b\, q_{n-2}} - \theta\right),$$

waarbij a en b gehele getallen zijn met $a \geq 1$, $b \geq 0$ en n de natuurlijke getallen ≥ 2 doorloopt.

Uit hulpstelling 1 volgt nu: voor elke $\gamma > 0$ is de doorsnee van $J(\theta)$ en het interval $(-\gamma, \gamma)$ op eindig veel punten na bevat in de vereniging van de verzamelingen $J_{a,b}(\theta)$, waarvoor $0 \leq b \leq a \leq c(k, \gamma)$. Anderzijds vormen de getallen $\zeta_n^{(a,b)}$ nog vrij goede benaderingen van θ en is dus elke verzameling $J_{a,b}(\theta)$ begrensd. Zij nu $J'_{a,b}(\theta)$ de verzameling van de verdichtingspunten van $J_{a,b}(\theta)$. Uit de twee genoemde feiten volgt dan:

(5) $$J'(\theta) = \bigcup_{0 \leq b \leq a} J'_{a,b}(\theta) = \bigcup_{a,b} J'_{a,b}(\theta).$$

Tevens:

Hulpstelling 2. De verzameling $J'(\theta)$ is dan en slechts dan discreet als elke verzameling $J'_{a,b}(\theta)$ eindig is.

2. We stellen

$$a_n^* = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots] \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Bekend is dat

(6) $$\theta = \frac{a_n^* \, p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n^* \, q_{n-1} + q_{n-2}} \quad \text{voor } n=2,3,\ldots,$$

als p_n/q_n de naderende breuken van θ zijn. Vult men dit in in (4), dan krijgt men na een kleine omwerking

(7) $$\frac{(-1)^n}{\zeta_n^{(a,b)}} = \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{\frac{a}{a_n^*} - b} + \frac{1}{a\lambda_{n-1} + b}\right\},$$

waarin $\lambda_{n-1} = q_{n-1}/q_{n-2} = [a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]$. Dus bestaat $J_{a,b}(\theta)$ uit de getallen $\zeta_n^{(a,b)}$ $(n \geq 2)$, waarvoor (7) geldt.

3. Laten we aannemen, dat θ kwadratisch is. Dan is de kettingbreuk $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ periodiek. Dan is ook de rij der resten a_n^* periodiek. Verder is het duidelijk dat in dit geval de rij der getallen λ_{n-1} slechts een eindig aantal verdichtingspunten heeft. Dan heeft ook voor vaste a en b de rij der getallen $\zeta_n^{(a,b)}$ slechts een eindig aantal verdichtingspunten, en is dus elk der verzamelingen $J'_{a,b}(\theta)$ eindig. Wegens hulpstelling 2 is dus $J'(\theta)$ discreet.

4. Laten we nu aannemen dat $J'(\theta)$ discreet is. Dan is elke verzameling $J'_{a,b}(\theta)$ eindig. We hoeven dit slechts toe te passen met $a=b=1$ en met $a=2$, $b=1$. Allereerst kan men bewijzen:

a) de rij $\{a_n^*\}$ heeft slechts eindig veel verdichtingspunten.

Onderstellen we eens dat dit niet waar is. Dan is er, omdat $J'_{1,1}(\theta)$ en $J'_{2,1}(\theta)$ eindig zijn, een oneindige rij verschillende getallen ρ_i $(i=1,2,\ldots)$ en een dubbeloneindige rij van indices $n(i,j)$, zodanig dat voor elke i geldt:

1^o. $n(i,j) \longrightarrow \infty$ als $j \longrightarrow \infty$

2^o. $(-1)^{n(i,j)}/\varphi^{(1,1)}_{n(i,j)}$ nadert voor $j \longrightarrow \infty$ tot een van i onafhankelijke limiet α_1

3^o. $(-1)^{n(i,j)}/\varphi^{(2,1)}_{n(i,j)}$ nadert voor $j \longrightarrow \infty$ tot een van i onafhankelijke limiet α_2

4^o. $a^*_{n(i,j)} \longrightarrow \rho_i$ als $j \longrightarrow \infty$.

Voor elke i geldt dan

$$\lim_{j\to\infty}\left\{\frac{1}{\frac{1}{a^*_{n(i,j)}}-1}+\frac{1}{\lambda_{n(i,j)-1}+b}\right\}=\lim_{j\to\infty}\left\{\frac{1}{\frac{1}{\rho_i}-1}+\frac{1}{\lambda_{n(i,j)-1}+1}\right\}=\alpha_1,$$

$$\lim_{j\to\infty}\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{\frac{2}{a^*_{n(i,j)}}-1}+\frac{1}{2\lambda_{n(i,j)-1}+1}\right\}=\lim_{j\to\infty}\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{\frac{2}{\rho_i}-1}+\frac{1}{2\lambda_{n(i,j)-1}+1}\right\}=\alpha_2$$

Daaruit kan men gemakkelijk een tegenspraak afleiden. Daarmee is a) bewezen.

Laten $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_g$ de verdichtingspunten van de rij $\{a^*_n\}$ zijn. Er zijn drie indices n,m,i met $n < m \leq n+g$, $i \leq g$, zodanig dat

$$|a^*_n - \rho_i| < \varepsilon_o , \qquad |a^*_m - \rho_i| < \varepsilon_o ,$$

waarbij ε_o een willekeurig gekozen positief getal is. Daaruit volgt dat er indices n,m zijn met $n < m \leq n+g$, zodanig dat de kettingbreukontwikkelingen van a^*_n en a^*_m tot een willekeurig gegeven index overeenstemmen. Daaruit volgt dat de rij $\{a_n\}$ periodiek is. Dus is θ een kwadratisch getal.

Daarmee is het bewijs van stelling 2 voltooid.

Literatuur

[1] M. Cugiani, Sopra una questione di approssimazione diofantea non lineare, Bollettino della U.M.I. (3), 10, 489-497 (1955)

[2] C.G. Lekkerkerker, Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici, Nota I e Nota II, Rend.Acc.Naz.Lincei Cl.Sci.fis.mat.nat.(8), 21, 179-185, 257-262 (1956)