STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1959 - 011

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

J. Verhoeff

30 mei 1959

Een weerlegging van een vermoeden van Euler betreffende de non-existentie van zekere Grieks-Latijnse vierkanten

1959

ZW 1959-011

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

door

J. Verhoeff

30 mei 1959

Een weerlegging van een vermoeden van Euler betreffende de non-existentie van zekere Grieks-Latijnse vierkanten.

Inleiding.

In een vorige "Actualiteiten"-voordracht hebben we een overzicht gegeven over de stand van de research op het gebied van de constructie van Grieks-Latijnse vierkanten. We zullen dit hier in het kort samenvatten.

Onder een n bij n Latijns vierkant verstaan we een $n \times n$-matrix a_{ij} met de eigenschap dat de elementen n verschillende waarden aannemen en dat in elke rij en elke kolom elke waarde juist éénmaal voorkomt.

Men noemt twee Latijnse vierkanten $\{a_{ij}\}$ en $\{b_{ij}\}(i,j=1,\ldots,n)$ orthogonaal wanneer de n^2 geordende paren $c_{ij}=(a_{ij},b_{ij})$ alle verschillend zijn. De matrix $\{c_{ij}\}$ wordt een Grieks-Latijns vierkant genoemd, daar men de gewoonte had om voor a_{ij} n Latijnse letters en voor b_{ij} n Griekse letters te gebruiken.

1) Het is triviaal dat er voor n=2 geen Grieks-Latijnse vierkanten mogelijk zijn.

2) Voor $n=2^k$, $k=2,3,\ldots$ construeert men gemakkelijk n-1 Latijnse vierkanten die paarsgewijze orthogonaal zijn. Hiertoe zullen we de elementen gebruiken van een eindig lichaam dat er juist n heeft. De n-1 matrices $\{a^r_{ij}\}$ met $a_{ij}=i+rj$, $r\neq0$ voldoen aan het gestelde.

3) Voor n=2k+1 vormen de beide matrices $\{a_{ij}\}$ en $\{b_{ij}\}$ een orthogonaal paar indien men $a_{ij}=i+j \pmod n$ en $b_{ij}=i+2j \pmod n$ kiest.

4) Voor n=rs kan men uit gegeven paren orthogonale Latijnse vierkanten van de dimensies r en s direct een orthogonaal paar van de dimensie n construeren.

Dit gaat door de vorming van een soort Kronecker product. Stel de gegeven matrices zijn $\{a_{ij}\};\{a'_{ij}\}$ en $\{b_{km}\};\{b'_{km}\}$, waarbij $i,j=0,1,\ldots,r-1$ en $k,m=0,1,\ldots,s-1$. Als elementen van de gevraagde matrices c_{pq} en c'_{pq}, $(p,q=0,1,\ldots,n)$ gebruiken we elementen-paren van de gegeven matrices. Is $p=Pr+P'$ en $q=Qr+Q'$ met $0 \leq P, Q \leq s-1$ en $0 \leq P', Q' \leq r-1$, dan nemen we $c_{pq}=(a_{P'Q'},b_{PQ})$ en $c'_{pq}=(a'_{P'Q'},b_{PQ})$.

Door combinatie van de laatste drie stellingen kan men voor alle waarden van $n \neq 4k+2$ orthogonale paren vinden.

In 1901 heeft Tarry in principe door alle mogelijkheden te proberen, bewezen dat er voor $n=6$ geen Grieks-Latijnse vierkanten bestaan.

In 1782 heeft L. Euler het vermoeden uitgesproken, dat voor $n=4k+2$ er geen Grieks-Latijnse vierkanten bestaan. Dit vermoeden is later als volgt gegeneraliseerd: er bestaan voor $n=\prod p_i^{\alpha_i}$ juist $\rho=\min_i(p_i^{\alpha_i}-1)$ paargewijze orthogonale Latijnse vierkanten.

In 1910 heeft Wernicke hier een bewijs van gegeven, maar McNeish liet in 1921 zien dat dit schrijfsel de naam van bewijs ten onrechte droeg. In 1921 liep echter McNeish er zelf ook in door eveneens een schijnbewijs te presenteren.

§ 1. De constructie van G-L-v's voor $n=4k+2$ en $k=2,3,\ldots$ enz.

In de New York Times (International Edition) van 27 april j.l. stond het bericht dat drie mathematici, t.w. R.C. Bose, S.S. Shrikhande en E.T. Parker, het bovengenoemde vermoeden van Euler weerlegd hadden door de constructie van een 10 x 10 Grieks-Latijns vierkant. Een foto toonde behalve de drie genoemde mathematici het volgende fragment van een 10 x 10 Latijns vierkant:

0	4	1	7	.	.	.	3	6	5
.	1	5	2	7	.	.	4	0	6
.	.	2	6	3	7	.	5	1	0
.	.	.	3	0	4	7	6	2	1
7	.	.	.	4	1	5	0	3	2
6	7	.	.	.	5	2	1	4	3
3	0	.	.	.	.	6	2	5	4
1	2	.	4	.	6	0	7	8	9
2	3	.	5	6	.	.	.	.	.
.	5	.	0	.	.	.	.	.	.

De heer A. Benard slaagde erin dit fragment aan te vullen tot een Latijns vierkant en er een tweede bij te vinden dat ermee orthogonaal was. Hierdoor won het bovengenoemde aanzienlijk aan geloofwaardigheid. Spreker slaagde er daarna in hetzelfde te doen, daarbij echter van spiegeling gebruikmakend, wat echter niet essentieel blijkt te zijn.

0_1	4_9	1_3	7_0	2_2	8_4	9_8	3_6	6_7	5_5
9_9	1_1	5_0	2_3	7_4	3_2	8_5	4_7	0_8	6_6
8_6	9_0	2_1	6_4	3_3	7_5	4_2	5_8	1_9	0_7
5_2	8_7	9_4	3_1	0_5	4_3	7_6	6_9	2_0	1_8
7_7	6_2	8_8	9_5	4_1	1_6	5_3	0_0	3_4	2_9
6_3	7_8	0_2	8_9	9_6	5_1	2_7	1_4	4_5	3_0
3_8	0_3	7_9	1_2	8_0	9_7	6_1	2_5	5_6	4_4
1_5	2_6	3_7	4_8	5_9	6_0	0_4	7_3	8_2	9_1
2_4	3_5	4_6	5_7	6_8	0_9	1_0	9_2	7_1	8_3
4_0	5_4	6_5	0_6	1_7	2_8	3_9	8_1	9_3	7_2

Benard

0_0	5_9	3_8	7_2	6_7	8_1	9_4	1_3	2_6	4_5
9_5	1_1	6_9	4_8	7_3	0_7	8_2	2_4	3_0	5_6
8_3	9_6	2_2	0_9	5_8	7_4	1_7	3_5	4_1	6_0
2_7	8_4	9_0	3_3	1_9	6_8	7_5	4_6	5_2	0_1
7_6	3_7	8_5	9_1	4_4	2_9	0_8	5_0	6_3	1_2
1_8	7_0	4_7	8_6	9_2	5_5	3_9	6_1	0_4	2_3
4_9	2_8	7_1	5_7	8_0	9_3	6_6	0_2	1_5	3_4
3_1	4_2	5_3	6_4	0_5	1_6	2_0	7_7	8_8	9_9
6_2	0_3	1_4	2_5	3_6	4_0	5_1	9_8	7_9	8_7
5_4	6_5	0_6	1_0	2_1	3_2	4_3	8_9	9_7	7_8

Verhoeff

Een nadere analyse leert dat de volgende methode gebruikt kan worden. Het 10 x 10 vierkant wordt eerst verdeeld in vier gebieden en wel: een 7 x 7 vierkant in de linker bovenhoek, een staande 7 x 3 rechthoek er naast, een liggende 3 x 7 rechthoek er onder en een 3 x 3 vierkant rechts onder.

De cijfers 0,1,2,3,4,5,6 worden cyclisch ingevuld en wel in het eerste vierkant volgens de hoofddiagonaal of daaraan evenwijdig, in de staande rechthoek van boven naar beneden en in de liggende van links naar rechts. De cijfers 7,8,9 in het eerste vierkant voor in reeksen evenwijdig aan de hoofddiagonaal en in het tweede vierkant op de één of andere wijze zo dat ze een Latijns vierkant vormen.

Het tweede vierkant wordt op een dergelijke manier ingevuld met dien verstande dat in het 7 x 7-vierkant de nevendiagonalen die de eerste maal door lage cijfers werden bezet nu door de hoge worden ingenomen en omgekeerd. In het 3 x 3-vierkant worden weer 7,8 en 9 ingevuld, maar zó dat er een 3 x 3-Latijns vierkant ontstaat, orthogonaal met het vorige.

Er moet nu getracht worden de 0-6 cycli dusdanig te laten starten dat er 1): twee Latijnse vierkanten ontstaan en 2): dat deze orthogonaal zijn. Aan 1) is voldaan zodra de eerste rij en de eerste kolom uit louter verschillende cijfers bestaan.

Om de tweede eis te vervullen moeten we ervoor zorgen, dat alle paren voorkomen. De 9 paren met alleen 7,8 of 9 komen alle voor in het 3 x 3 vierkant. De gemengde paren, dus met een hoog en een laag cijfer komen voor in het 7 x 7 vierkant. Tenslotte komen de paren met twee lage cijfers voor op de hoofddiagonaal en in de beide rechthoeken. Deze paren ontstaan dus doordat twee cycli worden gecombineerd. De uit zo'n combinatie voortkomende paren hebben de eigenschap dat het verschil tussen het eerste en het tweede cijfer constant is. Om geen duplicaten te krijgen is het dus voldoende dat deze 7 verschillen modulo 7 alle verschillend zijn.

Wij zullen hier geen oplossingen geven die in zekere zin ad hoc aan deze eisen voldoen, maar liever meteen de systematische oplossing voor alle n congruent 10 modulo 12. We zullen dit doen door uit een k x k Grieks-Latijns vierkant een 3k+1 x 3k+1 Grieks-Latijns vierkant te construeren, immers dan volgt dit resultaat door $k=4m+3$ te kiezen.

Zij dus gegeven het orthogonale paar Latijnse vierkanten $\{s_{ij}\}$ en $\{t_{ij}\}$, $i,j=1,2,\dots,k$. Neem voor de elementen van $\{s_{ij}\}$ en $\{t_{ij}\}$ de getallen $2k+1,\dots,3k+1$, en neem verder $a_{00}=0$, en voor $i=1,2,\dots,k$, $a_{0\,2i-1}=k+i$, $a_{0\,2i}=2k+i$, $a_{0\,2k+i}=i$ en $a_{2k+i\,0}=2k+1-i$. In het $(2k+1 \times 2k+1)$ vierkant links boven vullen we de cijfers diagonaalsgewijs in, met dien verstande dat we de cijfers boven de $2k$ herhalen en andere cijfers steeds modulo $2k+1$ met 1 verhogen. De staande $k \times 2k+1$ rechthoek wordt van boven naar beneden ingevuld door steeds het vorige cijfer modulo $2k+1$ met 1 te verhogen en de liggende $2k+1 \times k$ rechthoek evenzo van links naar rechts. In het $k \times k$ vierkant rechts onder komt op de $2k+i$ $2k+j$-de plaats het cijfer s_{ij}. De tweede matrix b_{ij} verkrijgen we door a_{ij} gedeeltelijk te spiegelen, $b_{ij}=a_{ji}$ voor i en j niet beide groter dan $2k$, terwijl $b_{2k+i\;2k+j}=t_{ij}$. Men verifieert gemakkelijk dat er zo een Grieks-Latijns vierkant is ontstaan. Deze methode levert alleen als $n=10 \pmod{12}$ tegenspraak met Euler's vermoeden. Er moet dus, om een volledig beeld te krijgen, nog een constructie worden gevonden voor $n=2 \pmod{12}$ $n\neq 2$ en voor $n=6 \pmod{12}$ $n\neq 6$. Is het eerstgenoemde geval opgelost dan volgt het tweede direct, mits $n=18$ bestaat, daar deze waarden van n alle door drie deelbaar zijn en er voor het quotient dan een constructie bestaat.

We zullen nu nog uit een $k \times k$-Grieks-Latijns vierkant door een modificatie van bovenstaande methode een $(3k+2) \times (3k+2)$-Grieks-Latijns vierkant afleiden. We beperken ons tot $k=4m$ wat ons juist de 12-vouden +2 geeft.

We beginnen weer het vierkant in vier delen te verdelen, een $8m+2 \times 8m+2$ en een $4m \times 4m$ vierkant en twee $4m \times 8m+2$ rechthoeken. In het tweede vierkant maken we op de één of andere manier een Grieks-Latijns vierkant met de getallen $8m+2$ tot $12m+1$. De rest wordt weer op de bekende manier ingevuld, de "lage" cijfers cyclisch en de "hoge" repeterend. We volstaan dus weer met het geven van de eerste rij en kolom van beide matrices.

$$a_{00}=b_{00}=0,\quad a_{0(8k+1+j)}=b_{(8k+1+j)0}=2k+1+j,\quad a_{0(10k+1+j)}=b_{(10k+1+j)0}=6k+1+j,$$

$$a_{(8k+1+j)0}=b_{0(8k+1+j)}=6k+2-j,\; a_{(10k+1+j)0}=b_{0(10k+1+j)}=2k+1-j,\; j=1,\dots,2k,$$

$$a_{01}=8k+2,\quad a_{0(2j+1)}=j+1,\quad a_{0\,4k+2}=1,\quad a_{02j}=4k+1+j,\quad b_{01}=2k+1,$$

$a_{0(4k+1+i)}=b_{0(i+1)}=8k+2+i$, $i=1,\ldots,4k-1$, $b_{0(4k+2)}=8k+2$, $b_{0(4k+1)}=$
$=6k+2$,

$b_{0(4k+2j+1)}=2k+1+j$, $b_{0(4k+2+2j')}=6k+2+j'$, $j'=1,\ldots,2k-1$.

Het is verder weer een kwestie van verificatie dat dit inderdaad een Grieks-Latijns vierkant is.

Een 14 x 14 Grieks-Latijns vierkant

0_0	6_x	9_y	x_1	y_7	7_2	z_5	8_z	u_4	3_u	1_9	2_6	5_8	4_3
4_u	1_1	7_x	0_y	x_2	y_8	8_3	z_6	9_z	u_5	2_0	3_7	6_9	5_4
u_6	5_u	2_2	8_x	1_y	x_3	y_9	9_4	z_7	0_z	3_1	4_8	7_0	6_5
1_z	u_7	6_u	3_3	9_x	2_y	x_4	y_0	0_5	z_8	4_2	5_9	8_1	7_6
z_9	2_z	u_8	7_u	4_4	0_x	3_y	x_5	y_1	1_6	5_3	6_0	9_2	8_7
2_7	z_0	3_z	u_9	8_u	5_5	1_x	4_y	x_6	y_2	6_4	7_1	0_3	9_8
y_3	3_8	z_1	4_z	u_0	9_u	6_6	2_x	5_y	x_7	7_5	8_2	1_4	0_9
x_8	y_4	4_9	z_2	5_z	u_1	0_u	7_7	3_x	6_y	8_6	9_3	2_5	1_0
7_y	x_9	y_5	5_0	z_3	6_z	u_2	1_u	8_8	4_x	9_7	0_4	3_6	2_1
5_x	8_y	x_0	y_6	6_1	z_4	7_z	u_3	2_u	9_9	0_8	1_5	4_7	3_2
9_1	0_2	1_3	2_4	3_5	4_6	5_7	6_8	7_9	8_0	x_x	z_u	u_y	y_z
6_2	7_3	8_4	9_5	0_6	1_7	2_8	3_9	4_0	5_1	u_z	y_y	x_u	z_x
8_5	9_6	0_7	1_8	2_9	3_0	4_1	5_2	6_3	7_4	y_u	u_x	z_z	x_y
3_4	4_5	5_6	6_7	7_8	8_9	9_0	0_1	1_2	2_3	z_y	x_z	y_x	u_u

Vermoedelijk is het mogelijk om ook in het algemeen voor $n=12k+6$, $k=1,2,\ldots$, op een dergelijke, doch uiteraard iets geraffineerdere wijze Grieks-Latijnse vierkanten te construeren, doch wij hebben dit alleen voor $k=1$ uitgevoerd.

Een Grieks-Latijns vierkant van 18 × 18

a_a	m_x	x_j	i_h	y_g	g_y	z_d	k_z	u_b	c_u	e_f	h_v	v_l	b_m	d_k	f_i	j_e	l_c
v_m	b_b	a_x	x_k	j_i	y_h	h_y	z_e	l_z	u_c	d_u	f_g	i_v	c_a	e_l	g_j	k_f	m_d
j_v	v_a	c_c	b_x	x_l	k_j	y_i	i_y	z_f	m_z	u_d	e_u	g_h	d_b	f_m	h_k	l_g	a_e
h_i	k_v	v_b	d_d	c_x	x_m	l_k	y_j	j_y	z_g	a_z	u_e	f_u	e_c	g_a	i_l	m_h	b_f
g_u	i_j	l_v	v_c	e_e	d_x	x_a	m_l	y_k	k_y	z_h	b_z	u_f	f_d	h_b	j_m	a_i	c_g
u_g	h_u	j_k	m_v	v_d	f_f	e_x	x_b	a_m	y_l	l_y	z_i	c_z	g_e	i_c	k_a	b_j	d_h
d_z	u_h	i_u	k_l	a_v	v_e	g_g	f_x	x_c	b_a	y_m	m_y	z_j	h_f	j_d	l_b	c_k	e_i
z_k	e_z	u_i	j_u	l_m	b_v	v_f	h_h	g_x	x_d	c_b	y_a	a_y	i_g	k_e	m_c	d_l	f_j
b_y	z_l	f_z	u_j	k_u	m_a	c_v	v_g	i_i	h_x	x_e	d_c	y_b	j_h	l_f	a_d	e_m	g_k
y_c	c_y	z_m	g_z	u_k	l_u	a_b	d_v	v_h	j_j	i_x	x_f	e_d	k_i	m_g	b_e	f_a	h_l
f_e	y_d	d_y	z_a	h_z	u_l	m_u	b_c	e_v	v_i	k_k	j_x	x_g	l_j	a_h	c_f	g_b	i_m
x_h	g_f	y_e	e_y	z_b	i_z	u_m	a_u	c_d	f_v	v_j	l_l	k_x	m_k	b_i	d_g	h_c	j_a
l_x	x_i	h_g	y_f	f_y	z_c	j_z	u_a	b_u	d_e	g_v	v_k	m_m	a_l	c_j	e_h	i_d	k_b
m_b	a_c	b_d	c_e	d_f	e_g	f_h	g_i	h_j	i_k	j_l	k_m	l_a	x_x	y_y	z_z	u_u	v_v
k_d	l_e	m_f	a_g	b_h	c_i	d_j	e_k	f_l	g_m	h_a	i_b	j_c	y_z	z_u	u_v	v_x	x_y
i_f	j_g	k_h	l_i	m_j	a_k	b_l	c_m	d_a	e_b	f_c	g_d	h_e	z_v	u_x	v_y	x_z	y_u
e_j	f_k	g_l	h_m	i_a	j_b	k_c	l_d	m_e	a_f	b_g	c_h	d_i	u_y	v_z	x_u	y_v	z_x
c_l	d_m	e_a	f_b	g_c	h_d	i_e	j_f	k_g	l_h	m_i	a_j	b_k	v_u	x_v	y_x	z_y	u_z

Het is ons niet gelukt om op een analoge manier voor n=6 een oplossing te vinden, iets wat Tarry zeker genoegen gedaan zou hebben.

Er blijven op dit gebied nog tal van belangrijke problemen over. Bijvoorbeeld is het nog niet bekend hoeveel onderling orthogonale Latijnse vierkanten er bestaan voor de hier besproken waarden van n.

Bibliografie

1. 1782 L. Euler, Recherches sur une nouvelle espèce de Quarré magiques, Verh. Zeeuws Genootsch. v. Wetensch. 9, Vlissingen, p.85-239.

2. 1901 G. Tarry, Le problème de 36 officiers. Compte Rendu de l'Association française pour l'Avancement de Science Naturel, p.122-123 et p.170-203.

3. 1910 P. Wernicke, Das Problem der 36 Offiziere, Jahresber. der D.M.V., vol.19, p.264-267.

4. 1921 H.F. McNeish, Das Problem der 36 Offiziere, Jahresber. der D.M.V., vol.30, p.151-153.

5. 1921/22 idem, Euler squares, Ann.of Math. 23, p.221-227.

6. 1938, E. Witt, Zum Problem der 36 Offiziere, Jahresber. der D.M.V. 48, p.66-67 (cursief).

7. 1949 R.H. Bruch & H.J. Ryser, The non-existence of certain finite projective planes, Can.J.of Math.1, p.88-93.

8. 1956 J. Verhoeff, Grieks-Latijnse vierkanten, voordracht Actualiteiten, rapport ZW 1956-020.

9. 1958 E.T. Parker, Construction of some sets of pairwise orthogonal latin squares, Notices A.M.S. vol.5 no 7, p.815.

10. 1959 R.C. Bose, Note on Parkers method of constructing pairwise orthogonal latin squares, Notices A.M.S. vol.6 no 2, p.179.

11. 1959 S.S. Shrikhande, Group divisible designs and the construction of pairwise orthogonal latin squares, Notices A.M.S. vol.6 no 2, p.181.