STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 011

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

P.C. Baayen

Toepassingen van een Lineariseringsprincipe

1962

ZW 1962-011

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

door

P.C. Baayen

Toepassingen van een Lineariseringsprincipe

1. Inleiding

Enkele jaren geleden heeft J. de Groot een lineariserings-constructie geïntroduceerd, waarmee resultaten van de navolgende aard konden worden afgeleid:

Stelling I. Zij A een volledig reguliere ruimte. Er is een topologische vectorruimte V, en een continue lineaire afbeelding $\Phi : V \longrightarrow V$, met de volgende eigenschappen: voor iedere continue afbeelding $\varphi : A \longrightarrow A$ bestaat er een relatief compacte copie A^* van A in V, zodanig dat het paar $(A^*, \Phi | A^*)$ aequivalent is met (A, φ).

(Als $\varphi : X \longrightarrow X$ en $\psi : Y \longrightarrow Y$, dan heten de paren (X, φ) en (Y, ψ) aequivalent indien er een topologische afbeelding τ van X op Y bestaat zodanig dat $\psi = \tau \varphi \tau^{-1}$).

We kunnen $\Phi | A^*$, of slordiger Φ zelf, een linearisering van φ noemen. Het is van belang dat Φ een universele linearisering is: als we φ wijzigen, behoeven we V en Φ niet te wijzigen; we moeten alleen een andere copie A^{**} van A in V zoeken.

Stelling II. Zij M een metrische ruimte. Dan is er een (i.h.a. niet-separabele) hilbertruimte H, en een continue lineaire operator $\Phi : H \longrightarrow H$, waardoor alle continue afbeeldingen $\varphi : M \longrightarrow M$ gelineariseerd kunnen worden. D.w.z. voor iedere continue $\varphi : M \longrightarrow M$ is er een copie M^* van M in H, zodanig dat $(M^*, \Phi | M^*)$ equivalent is met (M, φ).

Beide stellingen kunnen in verschillende richtingen uitgebreid worden. Zo bestaan er ook universele lineaire autohomeomorphieën; bij stelling I kan men in plaats van één afbeelding ook een halfgroep van continue afbeeldingen of een groep van autohomeomorphieën lineariseren, en bij stelling II kan men zulks doen voor compacte groepen van autohomeomorphieën of aftelbare halfgroepen van continue afbeeldingen.

Ook indien we stelling I generaliseren in dien zin, dat we een halfgroep van continue afbeeldingen beschouwen, kunnen we de copie A^* van A in V relatief compact kiezen. Hieruit volgt (cf. [4]):

Stelling III. Zij A een volledig reguliere ruimte, en zij G een halfgroep van continue afbeeldingen $A \longrightarrow A$. Er bestaat een compactificatie A^* van A, en een halfgroep G^* van continue afbeeldingen $A^* \longrightarrow A^*$, zodanig dat

$$G = \{ g^* | A : g^* \in G^* \} \quad .$$

In deze voordracht wordt de constructie, die ten grondslag ligt aan genoemde stellingen, besproken. De benaming "Lineariseringsconstructie" is eigenlijk onjuist; er zijn algemenere toepassingen. Om die te demonstreren zullen we de volgende stelling bewijzen:

Stelling IV. Er bestaat een continue afbeelding Φ van het cantor-discontinuum C in zichzelf, met de volgende eigenschap: door restrictie van Φ tot deelverzamelingen van C die zelf weer cantordiscontinua zijn, kan men <u>iedere</u> continue afbeelding van een cantordiscontinuum in zichzelf verkrijgen.

Deze stelling is als probleem geformuleerd door R.D.Anderson en bewezen door J. de Groot en P.C. Baayen.

Een andere eigenschap van het cantordiscontinuum, langs andere weg bewezen door R.D. Anderson [1], kan met de hier besproken constructie ook eenvoudig worden aangetoond:

<u>Stelling V</u>. Zij M een compacte metrische ruimte, en zij $\varphi: M \to M$ continu. Dan kan φ "gelift" worden naar het cantordiscontinuüm C; d.w.z. er is een continue afbeelding $\Phi: C \to C$, en een continue afbeelding μ van C op M, zodanig dat $\varphi\mu = \mu\Phi$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mu"'] & C \arrow[d, "\mu"'] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & M \end{tikzcd}$$

We zullen het bewijs van deze stelling hier niet geven, omdat Prof. Anderson zelf binnenkort hierover zal spreken (Utrecht, 12 december a.s.)

C. Kuratowski [5] bewees het volgende.

<u>Stelling VI</u>. Zij M een metriseerbare ruimte, en R een retract van M. Dan kan de topologie van M beschreven worden door een metriek d, zodanig dat voor alle $x \in M$

$$d(x,R) = d(x, \rho x),$$

waar ρ een geschikt gekozen retractie van M op R is.

Deze stelling werd onlangs gegeneraliseerd door W.Nitka [6]:

<u>Stelling VII</u>. Zij M een metriseerbare ruimte, en R een retract van M. Stel d_R is een metriek op R die de relatieve topologie van R beschrijft. Dan kan d_R worden voortgezet tot een metriek

d van M, die overeenkomt met de topologie van M, en die de volgende eigenschappen heeft:

1) er is een retractie ρ van M op R zodat $d(x,R)=d(x,\rho x)$ voor alle $x \in M$;
2) R is d-convex; d.w.z. uit $x \in R$, $y \in R$, $z \in M$ en $d(x,z)+d(z,y) \leq d(x,y)$ volgt $z \in R$.

Deze stelling kan eenvoudig worden afgeleid uit stelling II; deze afleiding zal in deze voordracht worden geschetst.

Tenslotte zullen we aantonen dat iedere continue afbeelding van een topologische ruimte X in zichzelf, in ruimer verband beschouwd, een product is van een autohomeomorphie en een retractie. Is X volledig regulier, dan kunnen deze autohomeomorphie en deze retractie geconstrueerd worden als een topologische automorphie en een projectie van een topologische vectorruimte in zichzelf. Is X metrisch, dan kunnen ze gekozen worden als een isometrie van een hilbertruimte H op zichzelf, en een continue projectie van H in zichzelf.

Exacter geformuleerd: we bewijzen o.a.:

Stelling VIII. Zij $\varphi : A \longrightarrow A$ een continue afbeelding van een volledig reguliere ruimte A in zichzelf. Dan zijn er een topologische vectorruimte V, een lineaire autohomeomorphie $\Phi_1 : V \longrightarrow V$, een continue projectie Φ_2 van V op een gesloten lineaire deelruimte, en een copie A^* van A in V, zodanig dat (A,φ) aequivalent is met $(A^*, \Phi_2 \circ \Phi_1 | A^*)$.

2. S-afbeeldingen

Als X,Y niet-lege verzamelingen zijn, dan zij X^Y de verzameling van alle afbeeldingen $Y \longrightarrow X$. In het bijzonder is X^X de verzameling van alle afbeeldingen van X in zichzelf. Deze laatste verzameling is een halfgroep onder compositie van functies:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Een verzameling X^G kan ook opgevat worden als een cartesisch product. In dat geval zullen we de waarde van een element $x \in X^G$ in $\gamma \in G$ aangeven met x_γ; i.p.v. x schrijven we ook $(x_\gamma)_{\gamma \in G}$. Als X een topologische ruimte is, zullen we X^G altijd getopologiseerd denken m.b.v. de producttopologie. Als X een lineaire ruimte is, beschouwen we X^G ook als lineaire ruimte, n.l. als direct product (i.e. optelling en scalaire vermenigvuldiging in X^G worden coördinaatsgewijs gedefinieerd).

Een afbeelding $\varphi : G \longrightarrow G$ induceert een afbeelding $\varphi^* : X^G \longrightarrow X^G$ die als volgt gedefinieerd wordt:

$$\varphi^* x = (x_{\varphi\gamma})_{\gamma \in G}, \quad \text{voor } x \in X^G \quad .$$

Iedere afbeelding $X^G \longrightarrow X^G$ die op deze wijze verkregen kan worden zullen we een S-afbeelding ("speciale" afbeelding) noemen.

De volgende feiten zijn evident:

<u>Stelling 1.</u> De toevoeging $\varphi \longrightarrow \varphi^*$ is een anti-isomorphie van de halfgroep G^G in de halfgroep van alle afbeeldingen $X^G \longrightarrow X^G$.

<u>Stelling 2</u>. Indien X een lineaire ruimte is, dan is iedere S-afbeelding $\varphi^* : X^G \longrightarrow X^G$ lineair.

<u>Stelling 3</u>. Indien X een topologische ruimte is, dan is iedere S-afbeelding $\varphi^* : X^G \longrightarrow X^G$ continu en open.

Verder merken we op: als φ 1.1. is, dan is φ^* 1.1.; als $\varphi G = G$, dan is $\varphi X^G = X^G$; als $\varphi^2 = \varphi$, dan is $\varphi^{*2} = \varphi^*$.

Zij nu G een halfgroep met eenheidselement. Aan iedere $\gamma \in G$ kunnen we dan toevoegen een afbeelding $\bar{\gamma}: G \longrightarrow G$, als volgt: $\bar{\gamma}(\xi) = \xi\gamma$; voor $\xi \in G$. De afbeelding $\bar{\gamma}$, op zijn beurt definieert een S-afbeelding $\bar{\gamma}^*: X^G \longrightarrow X^G$:

$$\bar{\gamma}^*(x) = (x_{\xi\gamma})_{\xi \in G} \quad .$$

De afbeelding $\gamma \longrightarrow \bar{\gamma}$ is een anti-isomorphie van G op een halfgroep $\bar{G}$ van transformaties $G \longrightarrow G$; de afbeelding $\bar{\gamma} \longrightarrow \bar{\gamma}^*$ is weer een anti-isomorphie. Bijgevolg is de afbeelding $\gamma \longrightarrow \bar{\gamma}^*$ een isomorphie van G in de halfgroep van alle afbeeldingen $X^G \longrightarrow X^G$.

3. Constructie van de inbedding

Zij X een verzameling, en G een halfgroep van afbeeldingen $X \longrightarrow X$, waartoe de identieke afbeelding ι behoort.
Zij $\tau: X \longrightarrow X^G$ gedefinieerd door

$$(\tau x)_\gamma = \gamma x \qquad (x \in X, \ \gamma \in G).$$

Voor $\varphi \in G$ geldt dan

$$(\bar{\varphi}^* \tau x)_\gamma = (\tau x)_{\gamma\varphi} = \gamma(\varphi x) = (\tau\varphi x)_\gamma \quad ;$$

en er volgt

$$\bar{\varphi}^* \tau = \tau\varphi,$$

ofwel

$$\bar{\varphi}^* | X^* = \tau\varphi\tau^{-1} | X^* \quad ,$$

waar $X^* = \tau X$.

De afbeelding τ is 1.1.: als $x \neq y$, dan is $(\tau x)_\iota \neq (\tau y)_\iota$, dus $\tau x \neq \tau y$.

Voor verschillende toepassingen is het nuttig en nodig deze constructie te generaliseren. In de eerste plaats kunnen we een abstracte halfgroep F, met eenheid, nemen; voor iedere homomorphie σ van F op een transformatiehalfgroep $G \subset X^X$ vinden we dan een inbedding $\tau : X \longrightarrow X^F$:

$$(\tau x)_\varphi = (\sigma\varphi)(x) \quad , \quad \text{voor } x \in X \text{ en } \varphi \in F.$$

Op deze wijze bereiken we, dat eenzelfde ruimte, X^F, en eenzelfde transformatie-halfgroep van deze ruimte, $\overline{F}^*$, gebruikt kunnen worden om verschillende transformatiehalfgroepen $G \subset X^X$ te lineariseren, nl. alle G die homomorphe beelden zijn van F.

In de tweede plaats is het niet nodig dat de transformaties uit G gedefinieerd zijn op geheel X. We kunnen ook uitgaan van een $G \subset A^A$, waar $A \subset X$. De inbedding τ definiëren we dan ook niet op geheel X, maar alleen op A. Hiermee bereiken we, dat we de linearisering van (A,G) in twee etappes kunnen uitvoeren: eerst lineariseren we alleen de ruimte A, door inbedding in een lineaire ruimte X, en vervolgens lineariseren we G, door een volgende inbedding in X^G.

Stelling 4. Zij X een topologische ruimte, $A \subset X$, en zij G een halfgroep van continue afbeeldingen $A \longrightarrow A$, waartoe ook de identieke afbeelding behoort. Zij F een abstracte halfgroep met eenheid en zij σ een homomorphie van F op G. Dan is de inbedding $\tau : A \rightarrow X^F$, waar

$$(\tau x)_\varphi = (\sigma\varphi)(x) \qquad (\varphi \in F)$$

topologisch.

Bewijs.

Voor iedere $\varphi \in F$ is $x \rightarrow (\tau x)_\varphi$ continu, daar $\sigma\varphi \in G$ continu is. Dus τ is continu. En τ^{-1} is continu, want τ^{-1} valt op τA samen met de projectie $x^* \longrightarrow (x^*)_\varepsilon$ $(x^* \in X^F$; ε =eenheidselement van F).

Uit de stellingen 2,3 en 4 volgt eenvoudig stelling I.

Daartoe leggen we de volledig reguliere ruimte A eerst in een product van eenheidsintervallen, zeg Y; op zijn beurt is Y bevat in een product X van reële rechten. De ruimte X is lineair. De continue afbeelding φ moeten we opvatten als voortbrengende van een halfgroep met eenheid G, die homomorph beeld is van een vrije halfgroep met eenheid F, met één voortbrengende.

Stelling II volgt in het separabele geval uit stelling I. Een separabele metrische ruimte kan nl. topologisch worden ingebed in een product Y van aftelbaar veel eenheidsintervallen. Maar dan is Y homeomorph met de fundamentaalbalk van Hilbert, en hetzelfde geldt voor het topologisch product van aftelbaar veel exemplaren van Y.

Als M niet separabel is, kunnen we M eerst inbedden in de eenheidsbol S van een, eveneens niet separabele, hilbertruimte H. Het topologisch product van ten hoogste aftelbaar veel copieën van S is bevat in een nieuwe hilbertruimte H^* (als $x=(x_n)\in S^{\aleph_0}$ en $y=(y_n)\in S^{\aleph_0}$, definieer dan $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x_n,y_n)$).
Hiervan gebruik makend bewijst men gemakkelijk stelling II op analoge wijze als stelling I.

Het is duidelijk dat men op deze wijze kan aantonen:

<u>Stelling 5</u>. Zij G een ten hoogste aftelbare halfgroep van continue afbeeldingen van een metrische ruimte M in zichzelf. Er is een hilbertruimte H, een met G isomorphe halfgroep G^* van continue lineaire operatoren $H\longrightarrow H$, en een topologische inbedding $\tau : M\longrightarrow H$, zodanig dat

$$\varphi^*|\tau M = \tau\varphi\tau^{-1}$$

voor corresponderende $\varphi^*\in G^*$ en $\varphi\in G$.

Voor later gebruik vermelden we nog even afzonderlijk het speciale geval van een halfgroep G, voortgebracht door een continue afbeelding $\varphi : M \longrightarrow M$ met $\varphi^2 = \varphi$ (een retractie dus). Uit stelling 5 volgt dan dat φ kan worden gelineariseerd door een continue lineaire operator $\Phi : H \longrightarrow H$ met $\Phi^2 = \Phi$, d.w.z. door een (i.h.a. niet orthogonale) continue projectie van H op een gesloten deelruimte H_o.

4. Toepassing op het cantordiscontinuum

Stelling 6. Zij X een topologische ruimte, die homeomorph is met het topologisch product van aftelbaar veel copieën van X. Dan bestaat er een "universele" continue afbeelding $\Phi : X \longrightarrow X$; d.w.z. een continue afbeelding met de volgende eigenschap: voor iedere continue afbeelding $\varphi : X \longrightarrow X$ bestaat er een deelruimte Y van X, homeomorph met X, zodanig dat $(Y, \Phi | Y)$ aequivalent is met (X, φ).

Bewijs.
Pas stelling 4 toe met A=X, en met F=vrije halfgroep met eenheid met één voortbrengende. Daar X^F homeomorph is met X, volgt het gestelde.

Voorbeelden van ruimten die homeomorph zijn met het topologisch product van aftelbaar veel copieën ervan zijn het cantordiscontinuum, de gegeneraliseerde cantordiscontinua, de fundamentaalbalk van Hilbert, en algemeen iedere ruimte die reeds het topologisch product is van oneindig veel identieke (homomorphe) ruimten.

I.h.b. volgt stelling IV uit de inleiding.

Evenzo bewijst men:

Stelling 7. Zij X een topologische ruimte, die homeomorph is met het topologisch product van aftelbaar veel copieën van X. Dan bestaat er een "universele" homeomorphie Φ van X op zichzelf, in die zin, dat er voor iedere homeomorphie φ van X op X een deelruimte Y van X bestaat, homeomorph met X, zodanig dat $(Y, \Phi \mid Y)$ aequivalent is met (X, φ).

Analoge stellingen gelden voor halfgroepen van continue afbeeldingen of groepen van homeomorphieën.

5. Toepassing op retracties

We zullen nu een bewijs van stelling VII (en daarmee ook van stelling VI) schetsen.

Zij M een metrische ruimte, R een retract van M, ρ een retractie van M op R. Daar M topologisch ingebed kan worden in een hilbertruimte H, mogen we gemakshalve aannemen dat reeds $M \subset H$. Het is eenvoudig in te zien dat de volgende afbeelding $\tau : M \longrightarrow H \times H$ topologisch is:

$$\tau x = (\rho x, x - \rho x) \qquad (x \in M).$$

Dan is $\tau \rho x = (\rho x, 0) = \pi_1 x$, waar π_1 de projectie op de eerste coördinaat is:

$$\rho^* := \tau \rho \tau^{-1} = \pi_1 \mid \tau M.$$

Zij d_H de metriek in H gedefinieerd door de hilbertnorm. Dan wordt de relatieve topologie van $R \times H \subset H \times H$ ook beschreven door de metriek

$$d^*(\xi, \eta) = d_R(\xi_1, \eta_1) + d_H(\xi_2, \eta_2) \quad ,$$

voor $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R \times H$ en $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in R \times H$. Deze metriek komt dus overeen met de topologie van M^*.

De verzameling $R^* = \rho^* M^* = \tau R$ bestaat uit alle punten $(x, 0)$, $x \in R$. Het is duidelijk dat R^* d^*-convex is in M^* : als $\xi = (x, 0) \in R$, $\eta = (y, 0) \in R$, $\zeta = (\rho z, z - \rho z) \in M^*$, en als

$$d_R(x,y) = d(\xi, \eta) = d(\xi, \zeta) + d(\zeta, \eta) =$$

$$= d_R(x, \rho z) + d_H(0, z - \rho z) + d_R(y, \rho z) + d_H(0, z - \rho z),$$

dan moet noodzakelijk $d_H(0,z-\rho z)=0$, d.w.z. $z=\rho z$ of $\zeta\in R^*$.
Voorts geldt, voor $\xi=(\rho x, x-\rho x)\in M^*$:

$$d^*(\xi, R^*) = d^*(\xi, \rho^*\xi).$$

Want als $\eta=(y,0)\in R^*$, dan is

$$d^*(\xi,\eta)= d_R(\rho x,y) + d_H(x-\rho x,0)$$

minimaal als $d_R(\rho x,y)$ minimaal is, dus als $y=\rho x$, ofwel $\eta=\rho^*\xi$.
"Terugtransportatie" van d^* naar M levert een metriek d met alle gewenste eigenschappen. (Het is duidelijk dat d een voortzetting is van d_R, want als $x,y\in R$; $\xi=(x,0)$, $\eta=(y,0)$; dan is $d^*(\xi,\eta)=d_R(x,y)$).

6. P-afbeeldingen

Zij X een topologische vectorruimte. Een continue lineaire operator $\Phi: X^A\longrightarrow X^A$ heet een P-operator als hij te schrijven is als product van twee S-afbeeldingen Φ_1 en Φ_2,

$$\Phi= \Phi_1 \circ \Phi_2 ,$$

waar Φ_1 een projectie is en Φ_2 een automorphie van X^A.
Algemeen zullen we een S-afbeelding φ^* een P-afbeelding noemen indien

$$\varphi^*= \varphi_1^* \circ \varphi_2^* ,$$

waar φ_1^* en φ_2^* beide S-afbeeldingen zijn, met $\varphi_1^{*2}= \varphi_1^*$, terwijl φ_2^* een 1-1-afbeelding is van X^A op zichzelf.

<u>Lemma</u>. Zij A een verzameling. Er is een $A'\supset A$, gelijkmachtig met A, zodanig dat iedere $\varphi\in A^A$ kan worden voortgezet tot een $\varphi': A'\to A'$, met de eigenschap dat

$$\varphi' = \varphi_1' \circ \varphi_2' ,$$

waar $(\varphi_1')^2= \varphi_1'$, terwijl φ_2' een 1-1-afbeelding is van A' op zichzelf. Men kan deze voortzetting zo kiezen dat $\varphi \longrightarrow \varphi'$ een isomorphie is van A^A in $(A')^{A'}$.

Bewijs.
Als A eindig is zal A'=A moeten zijn. Zij $S \subset A$ zodanig dat $\varphi S = \varphi A$ en $\varphi | S$ 1-1. Er is een 1-1-afbeelding f van $A \setminus S$ op $A \setminus \varphi A$. Definieer φ_1 en $\varphi_2 : A \longrightarrow A$ als volgt:

$$\varphi_1 \,|\, \varphi A = \iota \,|\, \varphi A \quad , \quad \varphi_1 \,|\, A \setminus \varphi A = \varphi f^{-1} \; ;$$
$$\varphi_2 \,|\, S = \varphi \,|\, S \quad , \quad \varphi_2 \,|\, A \setminus S = f \; ;$$

waar ι de identieke afbeelding $A \longrightarrow A$ voorstelt. Dan is $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, $\varphi_1^2 = \varphi_1$, φ_2 is 1-1 en "op".

Als A oneindig is behoeven $A \setminus S$ en $A \setminus \varphi A$ niet gelijkmachtig te zijn. Dit is dan echter te repareren door een verzameling B te nemen, die A niet snijdt en gelijkmachtig is met A. Zij $A' = A \cup B$; kies een vaste $a \in A$ en definieer $\varphi' : A' \longrightarrow A'$ door

$$\varphi' | A = \varphi \quad ; \quad \varphi' x = \varphi a \quad \text{voor alle } x \in B.$$

Als nu $S' \subset A'$ zodat $\varphi' | S'$ 1.1., $\varphi' S' = \varphi' A' (= \varphi A)$, dan zijn $A' \setminus S'$ en $A' \setminus \varphi' A'$ wel gelijkmachtig, en een analoge constructie als boven kan worden gebruikt.
Het is duidelijk dat $\varphi \longrightarrow \varphi'$ een isomorphie is.

Stelling 8. Zij G een halfgroep van continue afbeeldingen $X \longrightarrow X$, die de identieke afbeelding $\iota : G \longrightarrow G$ bevat. Dan kan (X,G) "gelineariseerd" worden door een halfgroep van P-afbeeldingen $X^{|G|} \longrightarrow X^{|G|}$. D.w.z. er is een halfgroep G^* van P-afbeeldingen $X^{|G|} \longrightarrow X^{|G|}$, en een topologische inbedding $\tau : X \longrightarrow X^{|G|}$, zodanig dat

$$\gamma^* \longrightarrow \tau^{-1} \gamma^* \tau$$

een isomorphie is van G^* op G.

Bewijs.
Zij $\overline{G}$ evenals in 2. de halfgroep van rechts-vermenigvuldigingen

in G; $\overline{G} \subset G^G$. Volgens het lemma is er een verzameling $B \supset G$; een halfgroep $F \subset B^B$ die de eenheidsafbeelding $B \to B$ bevat en waarvan elke afbeelding φ de vorm $\varphi_1 \circ \varphi_2$ heeft met $\varphi_1^2 = \varphi_1$, φ_2 1-1 en "op"; en een isomorphie van F op $\overline{G}$ die aan $\varphi \in F$ toevoegt

$$\varphi | G = \overline{\varphi(\iota)} \ .$$

Uit het bewijs van het lemma volgt nog dat men ervoor zorgen kan dat

$$\varphi(\beta) = \varphi(\iota)$$

voor alle $\beta \in B \setminus G$. Zij F^* de halfgroep van S-afbeeldingen $\varphi^* : X^B \longrightarrow X^B$ $(\varphi \in F)$. Dan is F^* anti-isomorph met F, dus met $\overline{G}$, en dus isomorph met G; en wel is de volgende afbeelding σ een isomorphie van F^* op G:

$$\varphi^* \longrightarrow \varphi(\iota) \quad .$$

Definieer $\tau : X \longrightarrow X^B$ als volgt:

$$(\tau x)_\beta = \beta(x) \quad \text{als} \quad \beta \in G \ ;$$
$$(\tau x)_\beta = x \quad \text{als} \quad \beta \in B \setminus G.$$

Dan is τ een topologische inbedding (vgl. het bewijs van stelling 4). En er geldt:

$$\tau^{-1} \varphi^* \tau = \varphi(\iota) = \sigma(\varphi^*) \ ;$$

want als we γ schrijven voor $\varphi(\iota)$, dan geldt:

$$(\tau \gamma x)_\beta = \beta \gamma x = \overline{\gamma}(\beta) x = \varphi(\beta) x = (\varphi^* \tau x)_\beta \quad \text{als} \quad \beta \in G;$$
$$(\tau \gamma x)_\beta = \gamma x = (\tau x)_\gamma = (\tau x)_{\varphi(\iota)} = (\tau x)_{\varphi\beta} = (\varphi^* \tau x)_\beta$$
$$\text{als} \quad \beta \in B \setminus G.$$

Daar $|A| = |G|$ volgt het gestelde nu onmiddellijk.

Ook deze stelling laat weer generalisaties toe. Het is weer mogelijk een deelruimte A van X te nemen en een halfgroep $G \subset A^A$; dan wordt de topologische inbedding τ in $X^{|G|}$ alleen gedefinieert op A. Ook is het weer mogelijk een abstracte halfgroep F tussen te schakelen, om een "universele" linearisatie door P-afbeeldingen in $X^{|F|}$ te verkrijgen voor alle $G \subset A^A$ die een homomorph beeld zijn van F.

I.h.b. zullen we een volledig reguliere ruimte A eerst weer inbedden in een product X van reële rechten. Op deze wijze vinden we dan stelling VIII, en zelfs:

Stelling 9. Zij A een volledig reguliere ruimte. Er zijn een topologische vectorruimte V, een lineaire autohomeomorphie $\Phi_2 : V \longrightarrow V$, en een continue projectie Φ_1 van V op een lineaire deelruimte, met de volgende eigenschap: voor iedere continue afbeelding $\varphi : A \longrightarrow A$ is er een copie A^* van A in V zodanig dat de paren (A,φ) en $(A^*, \Phi_1 \circ \Phi_2 | A^*)$ aequivalent zijn.

Stelling 10. Zij G een halfgroep van continue afbeeldingen van een volledig reguliere ruimte A in zichzelf, die de identieke afbeelding bevat. Er zijn een topologische vectorruimte V, een halfgroep G^* van P-operatoren $V \longrightarrow V$, en een topologische inbedding τ van A in V zodanig dat (A,G) en $(\tau A, G^* | \tau A)$ aequivalent zijn, indien zin dat

$$\gamma^* \longrightarrow \tau^{-1} \gamma^* \tau$$

een isomorphie is van G^* op G.

Evenzo bewijst men, met iets meer moeite:

Stelling 11. Zij G een halfgroep van continue afbeeldingen van een metrische ruimte M in zichzelf, die de identieke afbeelding bevat. Dan kan G gelineariseerd worden door een halfgroep G^* van continue lineaire operatoren van een hilbertruimte H in zichzelf, zodanig dat elk van deze operatoren een product $\Phi_1 \circ \Phi_2$ is van een isometrie Φ_2 van H op zichzelf, en een continue projectie Φ_1 van H in zichzelf.

Als $\varphi : X \longrightarrow X$ reeds een retractie is, dan kan φ gerepresenteerd worden door een pure projectie (we nemen aan dat X een (deelverzameling van een) topologische vectorruimte is). Door een wijziging van de inbedding $\tau : X \longrightarrow X^2$ kunnen we dit beter laten uitkomen. Definieer

$$\tau x = (\varphi x, x - \varphi x) .$$

Dan is τ weer een topologische inbedding. Er geldt:

$$\tau \varphi x = (\varphi x, 0) \quad ,$$

en dus geldt: $\tau \varphi \tau^{-1} = \pi_1 \mid \tau X$, waar π_1 de kanonieke projectie is van $X \times X$ op de eerste factor.

Ook indien φ een continue afbeelding $X \longrightarrow X$ die een eindige halfgroep voortbrengt, kunnen we de voorstelling van φ als P-afbeelding duidelijk illustreren.

Stel $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \ldots, \varphi^{n+m-1}$ zijn twee aan twee verschillend, terwijl $\varphi^{n+m} = \varphi^n$ $(n \geq 0,\ m \geq 1)$. Definieer $\tau : X \longrightarrow X^{n+m}$ als volgt:

$$\tau x = (\varphi^n x, \varphi^{n+1} x, \ldots, \varphi^{n+m-1} x, \varphi^m x - x, \varphi^{m+1} x - \varphi x, \ldots, \varphi^{n+m-1} x - \varphi^{n-1} x)$$

Het is evident dat τ continu is, en dat het niet moeilijk is aan te tonen dat τ 1.1. is met continue inverse. Dus τ is een topologische inbedding. En

$$\tau \varphi x = (\varphi^{n+1} x, \varphi^{n+2} x, \ldots, \varphi^{n+m-2} x, \varphi^n x, \varphi^{m+1} x - x, \ldots, \varphi^{n+m-1} x - \varphi^{n-1} x, 0)$$

hetgeen aantoont dat $\tau \varphi \tau^{-1} = \Phi_1 \circ \Phi_2 \mid \tau X$, waar, voor $\xi = (\xi_i) \in X^{n+m}$:

$$\Phi_1 \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+n-1}, 0) \quad ;$$

$$\Phi_2 \xi = (\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_m, \xi_1, \xi_{m+2}, \xi_{m+3}, \ldots, \xi_{m+n}, \xi_{m+1}) .$$

Dan is Φ_1 ten duidelijkste een projectie (de kanonische projectie van X^{n+m} op de deelruimte opgespannen door de eerste n+m-1 factoren) en Φ_2 is een topologische afbeelding van X^{n+m} op zichzelf (een isometrie als X een hilbertruimte is).

Literatuur:

[1] R.D. Anderson — On raising flows and mappings. To appear in the Bulletin of the Am.Math.Soc.

[2] J. de Groot — Every continuous mapping is linear. Notices Amer.Math.Soc. 6 (1959), 754.

[3] J. de Groot — Linearization of mappings. General topology and its relations to modern Analysis and Algebra (Proc.Symposium Prague 1961), 191-193.

[4] A.H. Copeland Jr. and J. de Groot — Linearization of a homeomorphism. Math.Ann. 144 (1961) 80-92.

[5] C. Kuratowski — Une condition métrique pour la rétraction des ensembles. Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie 28 (1935) 156-158.

[6] W. Nitka — Colloquium mathematicum 8 (1961) 35-37.