STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1964 - 011

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. N.H. Kuiper, Universiteit van Amsterdam

28 oktober 1964

Over de algemene lineaire groep in de Hilbert-ruimte

1964

ZW 1964-011

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

28 oktober 1964

Over de algemene lineaire groep in de Hilbert-ruimte

Prof.dr. N.H. Kuiper. Universiteit van Amsterdam

1. De Hilbert-ruimte

Een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ het lichaam der reële getallen is een verzameling A van elementen die vectoren heten, met

1^e. een compositie $A \times A \overset{+}{\to} A$, genaamd optelling, die $(A,+)$ tot een commutatieve groep maakt, en

2^e. een afbeelding $A \times \mathbb{R} \to A$, genaamd vermenigvuldiging met getallen,

zo, dat de bekende regels voor vectoren gelden:

$$1a = a; \ \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a; \ (\lambda+\mu)a = \lambda a+\mu a \ ;$$

$$\lambda(a+b) = \lambda a+\lambda b \quad \text{voor alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ a, b \in A.$$

De volgende lineaire ruimten (elk eventueel aan te duiden met A)

$\mathbb{R}^n$, rijen van n getallen $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$
of gelijkwaardig: rijen van aftelbaar oneindig veel getallen, met vanaf het n+1-ste getal nullen $x = (x_1, \ldots x_n, 0, 0, \ldots)$;

$\mathbb{R}^\infty$, rijen van aftelbaar oneindig veel getallen, met slechts

eindig vele ongelijke nul; ($\mathbb{R}^{\infty} = \bigcup_n \mathbb{R}^n$).
H, de separabele <u>Hilbert-ruimte</u>, met als elementen rijen van aftelbaar oneindig getallen $x_1, x_2, \ldots$ met $\Sigma_1^{\infty} \bar{x}_i x_i < \infty$,

voldoen aan de inclusie relaties:

$$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{\infty} \subset H$$

De <u>lengte</u> van de vector $y \in A$ is $|x| = \sqrt{\Sigma_1^{\infty} \bar{x}_i x_i}$. De afstand van de elementen x en y is $|x-y|$. De bekende eigenschappen van een metriek gelden. Zij volgen uit:

$$|x| = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad ; \quad |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Bovendien is

$$|\lambda x| = |\lambda| . |x| \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ x \in A$$

De <u>open bol</u> met middelpunt $a \in A$ en straal $\rho \in \mathbb{R}$ is de verzameling $\{x|\ |x-a| < \rho\}$. Een verzameling in A heet <u>open</u> indien hij de vereniging is van (eventueel oneindig vele) open bollen. De verzameling open verzamelingen van A vormen de <u>topologie</u> van A. Met de gegeven afstands definitie en topologie heet $\mathbb{R}^n$ de n-dimensionale euclidische ruimte, $\mathbb{R}^{\infty}$ een pré-Hilbert-ruimte, H de separabele Hilbert-ruimte.

Een rij vectoren $x_1, x_2, \ldots \in A$ heet <u>convergent</u>, indien een vector x bestaat en bij elke $\varepsilon > 0$ een N zó dat

$$n > N \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

Een rij vectoren $x_1, x_2, \ldots$ heet <u>Cauchy</u>, indien bij elke $\varepsilon > 0$ een N bestaat zó dat

$$(m > N \wedge n > N) \Longrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Elke convergente rij is Cauchy. Is elke Cauchy rij convergent dan heet A <u>compleet</u>. $\mathbb{R}^n$ en H zijn compleet. $\mathbb{R}^{\infty}$ is niet compleet.
Men neme de rij van vectoren in $\mathbb{R}^{\infty}$:

$$x_i = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots \tfrac{1}{i}, 0, 0, \ldots) \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Deze rij convergeert wèl in H !

2. De algemene lineaire groep.

Een afbeelding σ: $A \to A$ of $A \to \mathbb{R}$ (gedefinieerd op geheel A en éénduidig heet lineair indien

$$\sigma(\lambda a+\mu b) = \lambda\sigma a + \mu\sigma b \qquad \lambda,\mu \in \mathbb{R}; a,b \in A$$

De norm van σ is

$$\|\sigma\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|\sigma(x)|}{|x|}$$

Een endomorfisme of continue begrensde lineaire operator is een lineaire afbeelding σ: $A \to A$ met $\|\sigma\| < \infty$. Zij is continu omdat

$$|\sigma x-\sigma y| = |\sigma(x-y)| \leq \|\sigma\|.|x-y|.$$

Is $|x-y| < \varepsilon.\max[1,\|\sigma\|^{-1}]$ dan is $|\sigma x-\sigma y| < \varepsilon$. De endomorfismen vormen een lineaire ruimte End A over $\mathbb{R}$, waarin $\|\ \|$ als metriek genomen kan worden. (Is $A = \mathbb{R}^n$ dan bestaat End A uit de n×n-matrices). De metriek bepaalt een topologie de zgn. norm-topologie of uniforme topologie van End A. (Men kent ook zwakkere topologieën zoals de sterke en de zwakke topologie in de lineaire analyse).

Voorbeelden (In coordinaten $x_1, x_2, \ldots$) in End H.

I $\quad x_i' = \begin{cases} x_{i+k} & i+k > 0 \\ 0 & i+k \leq 0 \end{cases}$ $\qquad$ Ia $k = 0$, Ib $k > 0$, Ic $k < 0$

k heet de index van de (Fredholm-) operator.

II $\quad x_i' = \frac{1}{i} x_i$

Zijn σ en $\tau \in$ End A dan is de samenstelling $\tau\sigma = \tau \circ \sigma \in$ End A en

$$\|\tau\sigma\| \leq \|\tau\|.\|\sigma\|$$

Prop 1. De samenstelling $(\sigma,\tau) \to \tau\sigma$ is continu

Bewijs:

$$|(\tau'\sigma'-\tau\sigma)x| = |\tau'\sigma'x-\tau\sigma x| \leq |\tau'\sigma'x-\tau'\sigma x| + |\tau'\sigma x-\tau\sigma x|$$

$$\leq \|\tau'\|.|\sigma'x-\sigma x| + \|\tau'-\tau\|.|\sigma x|$$

$$\leq \|\tau'\|.\|\sigma'-\sigma\|.|x| + \|\tau'-\tau\|.\|\sigma\|.|x|$$

dus $$\|\tau'\sigma'-\tau\sigma\| \leq \|\tau'\|.\|\sigma'-\sigma\| + \|\tau'-\tau\|.\|\sigma\|$$

$$\leq \|\tau'-\tau\|.\|\sigma'-\sigma\| + \|\tau\|.\|\sigma'-\sigma\| + \|\tau'-\tau\|.\|\sigma\|$$

Dan bestaat bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zô dat $\|\sigma'-\sigma\| < \delta$, $\|\tau'-\tau\| < \delta$ impliceert $\|\tau'\sigma'-\tau\sigma\| < \varepsilon$.

Bestaat bij $\sigma \in \text{End } A$ een operator $\sigma^{-1} \in \text{End } A$ met

$$\sigma^{-1}.\sigma = \sigma.\sigma^{-1} = \underline{1} \in \text{End } A$$

dan heet σ <u>inverteerbaar</u>. σ^{-1} is de inverse van σ. (Voorbeeld niet inverteerbaar: I $k \neq 0$ en II.)

De inverteerbare operatoren in End A vormen de algemene lineaire groep.

$$GL(A) \subset \text{End } A$$

<u>Prop 2</u>. In GL(H) is de afbeelding inv: $\sigma \to \sigma^{-1}$ continu.

<u>Prop 3</u>. GL(H) is een open deelverzameling van End (H).

Men heeft de natuurlijke inclusies ($GL(n) = GL(\mathbb{R}^n)$):

$$\underline{1} \in GL(n) \subset GL(n+1) \subset GL(\infty) = \bigcup_n GL(n) \subset GL(H).$$

3. <u>Determinant</u>

Is $\sigma \in \text{End } \mathbb{R}^n$ dan is det σ het getal zô dat

$$\psi(\sigma a_1, \ldots \sigma a_n) = \det \sigma . \ \psi(a_1, \ldots a_n)$$

voor elk stel vectoren $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}^n$ en elke multilineiare anti-symmetrische functie ψ. Zie [1] pag.90.

Er geldt:

$\det \sigma\tau = (\det \sigma)(\det \tau)$; $\det \sigma^{-1} = (\det \sigma)^{-1} \neq 0$ (!) ;

$\det (\sigma \oplus \tau) = \det \sigma . \det \tau$

det is een <u>continue</u> functie op GL(n) en op GL(∞) d.w.z. bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat $\delta > 0$ zô dat

$$\|\sigma'-\sigma\| < \delta \Longrightarrow |\det(\sigma'-\sigma)| < \varepsilon$$

4. Continue wegen in GL(A)

Een weg van f(a) naar f(b), a < b, in GL(A) is een continue afbeelding

$$f: I = \{t \mid a \leq t \leq b\} \to GL(A)$$

d.w.z.: Bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat $\delta > 0$ zó dat

$$|t-t_0| < \delta \Longrightarrow \|f(t)-f(t_0)\| < \varepsilon$$

Stelling 1a. Er is in $GL(\infty)$ dus in $GL(n)$ geen continue weg die $1 \in GL(1) \subset GL(\infty)$ verbindt met $-1 \in GL(1) \subset GL(\infty)$

Bewijs: De continue functie determinant op zo een weg kan niet over de waarde 0 springen, gaande van 1 naar -1.

Stelling 1b. Er is in GL(H) een continue weg die $1 \in GL(1)$ met $-1 \in GL(1)$ verbindt.

Bewijs: In GL(2) kan men $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ met $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$ als volgt verbinden

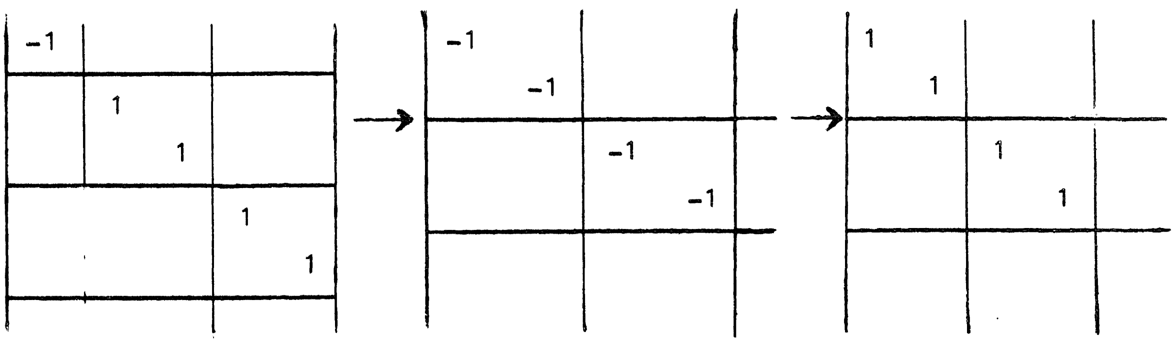
$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Voor $t = 0$ geeft dit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Voor $t = \frac{\pi}{2}$ geeft dit $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$

Voor $q = -1$ is dit de thans gewenste verbinding.

Analoog verbindt men:



Opm. Deze methode heet wel Eilenberg-Swindle.

Gevolg 1c. De functie det kan niet op passende wijze gedefinieerd worden op GL(H).

5. Een onsamentrekbare gesloten weg in GL(∞), $\mathbb{C}$)

De bedoelde weg is

$$f_0 : s \longrightarrow e^{is} \in GL(1, \mathbb{C}) \subset GL(\infty, \mathbb{C}) \qquad 0 \leq s \leq 2\pi$$

Een samenstrekking is een continue afbeelding

$$f(s,t) = f(s+2\pi,t) \in GL(\infty, \mathbb{C}) \qquad 0 \leq s \leq 2\pi \ , \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

met $\quad f(s,0) = f_0(s)$

en $\quad f(s,1) = \underline{1} \in GL(\infty, \mathbb{C})$

Stelling 2a. De genoemde weg is niet samentrekbaar in GL(∞, $\mathbb{C}$).

Bewijs: De continue functie determinant heeft voor f_0 de waarden e^{is}. Deze lopen éénmaal om het onbereikbare punt 0 heen, voor $0 \leq s \leq 2\pi$. Het aantal keren rondlopen hangt continu van t af en kan niet nul worden voor t = 1.

Stelling 2b. De genoemde weg is samentrekbaar in GL(H, $\mathbb{C}$)

Bewijs: Substitueer $q = e^{is}$ in het bewijs van stelling 1b:

$$\left|\begin{array}{c|cc|cc} e^{is} & & & & \\ \hline & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ \hline & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccccc} e^{is} & & & & \\ & e^{-is} & & & \\ & & e^{is} & & \\ & & & e^{-is} & \\ & & & & e^{is} \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{cc|cc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right|$$

6. Stelling 3a. (Putnam en Wintner [2]) Is $g \in GL(H) = GL(H, \mathbb{R})$ dan bestaat een weg van g naar $\underline{1} \in GL(H)$.

Bewijs [3]:

Stap I Kies een oneindig stel vectoren a_i met $|a_i| = 1$ in H zó dat

$$\left.\begin{array}{l} a_i \perp a_j \ , \ g a_i \perp a_j \\ a_i \perp g a_j , \ g a_i \perp g a_j \end{array}\right\} \quad \text{voor } j < i$$

$$i = 1,2,3,\ldots$$

$$(\text{def.: } x \perp y \iff |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2)$$

In een tweedimensionaal vlak door a_i en $g(a_i)$ beschouwen we een eenparige draaiïng (tijd $0 \leq t \leq 1$) die $g(a_i)$ in de richting van a_i brengt en een meetkundige vermenigvuldiging met factor $(2-t) + (t-1)|a_i|.|g\, a_i|^{-1}$ voor $1 \leq t \leq 2$. In de ruimte loodrecht op alle a_i en alle $g(a_i)$ nemen we de identieke afbeelding. Het stel elementen $f(t) \in GL(H)$ met de genoemde component werkingen bepaalt een weg

$$f(t).g$$

die leidt van $f(0)\, g = g$ naar $f(2)\, g = g_2$.

g_2 heeft de bizondere eigenschappen:

$$g_2(a_i) = a_i \qquad 1 = 1,2,3,\ldots$$

Dus
$$g_2(\sum \alpha_i a_i) = \sum \alpha_i a_i \qquad (\sum \alpha_i^2 < \infty)$$

De vectoren a_i brengen een deelHilbert-ruimte H' voort afsluiten met orthocomplement H_1

<u>Stap II</u>. Kies een orthonorme basis voor H_1 : b_j $\quad j = 1,2,\ldots$

Noem de H_1-component van $g_2(b_j)$: $g_3(b_j)$.
Beschouw de weg $g_t \in GL(H)$ $\quad 2 \leq t \leq 3$ gedefinieerd door

$$g_t(a_i) = a_i$$
$$g_t(b_j) = (3-t)g_2(b_j)+(t-2)g_3(b_j)$$

g_3 heeft de eigenschappen:

$$g_3|H' = id|H' \; ; \; g_3(H_1) = H_1$$

<u>Stap III</u>. Stel H_2 is de Hilbert-deelruimte met basis:

$$\begin{array}{llll} & a_j & j & \text{oneven} \\ H_3 \text{ idem :} & a_j & j = & 2\times\text{oneven} \\ H_4 \text{ idem :} & a_j & j = & 2^2\times\text{oneven} \\ H_5 \text{ idem :} & a_j & j = & 2^3\times\text{oneven} \\ \text{enz.} & & & \end{array}$$

Nu is $\quad H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \ldots$

een orthogonale decompositie, en g_3 heeft de matrix voorstelling

$$\left|\begin{array}{c|cc|c} q & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{c|cc|c} q & & & \\ \hline & q^{-1} & & \\ & & q & \\ \hline & & & q^{-1} \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{cc|cc|} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline \end{array}\right.$$

Pas de methode van stelling 1b toe met $q = g_3$ om de gewenste weg naar $\underline{1} \in GL(H)$ te vinden.
Men dient uiteraard te controleren dat de hier genoemde weg $0 \leq t \leq 4$ inderdaad een continue afbeelding is.

Algemener geldt:

<u>Stelling 3b</u>. [3]. Is GL de algemene lineaire groep met (uniforme =) de norm topologie van een Hilbert-ruimte over de reële getallen $\mathbb{R}$ de complexe getallen $\mathbb{C}$, of de quaternionen $\mathbb{H}$, van dimensie $\geq$ aftelbaar, dan bestaat een continue afbeelding:

$$F : GL \times I \longrightarrow GL \qquad I = \{t \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

met

$$F(g,0) = g \ , \ F(g,1) = 1 \in GL.$$

M.a.w.: GL is samentrekbaar op een punt.

<u>Toepassing</u>: <u>Indien</u> $h(x) \in \mathrm{End}\, H$, $g(x) \in GL(H)$, $x \in X$ een parameterruimte, $g(x)h(x) = h(x_0)$, <u>dan</u> geeft $F(g(x),t).h(x)$ een "contractie" van $h(x)$ $x \in X$ naar $h(x_0)$. $h(x)$ $x \in X$ is bijvoorbeeld een stel onderling lineair equivalente $(g(x))$ Hilbert-Schmidt operatoren.

Over de algemene lineaire groep van Banach-ruimten is niets van dezelfde aard bekend.

Litt.

[1] N.H. Kuiper. Analytische meetkunde verklaard met lineaire algebra, Noord Holl. Uitg. Mij

[2] R. Putnam and A. Wintner. The orthogonal group in Hilbert space. Amer. Journal of Math. LXXIV (1952) 52-78.

[3] N.H. Kuiper. The homotopy type of the unitary group of Hilbert space. Topology 4 (indruk).