STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1965-011

Enkele opmerkingen over het gebruik van de sommatieformule van Euler

door

J. van de Lune

december 1965

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

1. In de Wiskundige Opgaven van het Wiskundig Genootschap [1] treffen we het volgende, van Dr. B. van der Pol afkomstige, vraagstuk aan:

Bewijs dat, voor a > 1,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2^k}{a^{2^k}+1} = \frac{1}{\log a} . \tag{1.1}$$

Een correcte en eenvoudige oplossing wordt gegeven door J.C. Kok.

Naar aanleiding van hetzelfde vraagstuk merkt Dr. L. Crijns op, dat formule (1.1) gegeneraliseerd kan worden tot

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c^{bk}}{a^{c^k}+1} = \frac{(b-1)!}{\log c \cdot (\log a)^b} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^b} , \tag{1.2}$$

waarbij a > 1, c > 1 en b een natuurlijk getal is.

De argumentatie van Crijns luidt als volgt:
"De vraag is eerst, of de sommatie van Euler

$$\frac{1}{2} f(p) + f(p+1) + \ldots + f(q-1) + \frac{1}{2} f(q) =$$

$$= \int_p^q f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B^n}{2n!} \{f^{(2n-1)}(q) - f^{(2n-1)}(p)\}$$

kan worden toegepast.
De optredende integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{bz \log c}}{e^{\log a \cdot e^{z \log c}}+1} dz$$

gaat door de substitutie

$$e^{z \log c} = \frac{x}{\log a}$$

---

1) Wiskundige Opgaven met de Oplossingen, 19, I(1950) 308-311.

over in

$$\frac{1}{\log c\cdot(\log a)^b}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{e^x+1}\,dx = \frac{(b-1)!}{\log c\cdot(\log a)^b}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{b-1}}\right)\zeta(b).$$

De waarborg voor deze herleidingen is zo:
de integrand van de oorspronkelijke integraal is in elk eindig vak integreerbaar en evenals alle afgeleiden voor $z \to +\infty$ van de orde

$$e^{-\log a\cdot e^{z\log c}}$$

en voor $z \to -\infty$ van de orde $e^{bz\log c}$.
Ook dus de opvolgende afgeleiden naderen voor $z \to \pm\infty$ tot nul en

$$\frac{B^n}{2n!} \to O\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n}.$$

Aangezien

$$\lim_{b\to 1}\left(1-\frac{1}{2^{b-1}}\right)\zeta(b) = \log 2,$$

wordt voor $c = 2$, $b = 1$ de opgegeven waarde $(\log a)^{-1}$ gevonden".

Bovenstaande redenering van Crijns klinkt plausibel, maar is toch niet helemaal overtuigend. Er wordt o.i. onvoldoende aandacht geschonken aan de bij de sommatieformule van Euler behorende restterm, met als gevolg dat de betrekking (1.2) in het algemeen onjuist is.
Immers, het linkerlid van (1.2) is altijd groter dan

$$\frac{c^{b\cdot 0}}{a^{c^0}+1} = \frac{1}{a+1} > 0,$$

terwijl het rechterlid van (1.2) voor $c \to +\infty$ de limiet 0 heeft.

Aan het eind van zijn betoog licht Crijns zijn formule nog als volgt toe:

"Opmerking. Als men in

$$c^{bk} : (e^{c^k \cdot \log a} + 1)$$

log a vervangt door c log a, dan wordt deze algemene term van de reeks

$$\frac{c^{b(k+1)}}{c^b} : (e^{c^{k+1} \cdot \log a} + 1);$$

dus elke (k+1)de term wordt gelijk aan de k-de term van de oorspronkelijke reeks gedeeld door c^b en dit geldt dus ook voor de som, m.a.w. de som van de reeks is omgekeerd evenredig met

$$(\log a)^b.$$

Nu is de reeks in elk vak gelijkmatig convergent en bepaalt dus een continue functie, die bijgevolg de gedaante

$$C : (\log a)^b$$

heeft met C onafhankelijk van a.
De som van de reeks van de opgave bedraagt dus

$$C : \log a,$$

waarin C een absolute constante is".

Uit de volgende analyse blijkt dat ook deze adstructie een onnauwkeurigheid bevat.

Stelling: Voldoet de functie $\phi(x)$ op $x > 0$ aan de functionaalvergelijking

$$\phi(\alpha x) = \alpha^{-v} \cdot \phi(x),$$

waarbij $\alpha > 0$ en $v = \sigma + it$ constanten zijn, dan is

$$\phi(x) = x^{-v} \cdot P(\log x),$$

waarbij $P(t)$ een op $-\infty < t < +\infty$ gedefiniëerde periodieke functie van t is met de periode $|\log \alpha|$.

Bewijs: Stellen we $x = e^s$ en $\alpha = e^\tau$, dan is

$$\phi(e^{\tau+s}) = e^{-v\tau} \cdot \phi(e^s).$$

Hieruit leiden we af

$$e^{v\tau} \cdot \phi(e^{\tau+s}) = \phi(e^s)$$

of

$$e^{v(\tau+s)} \cdot \phi(e^{\tau+s}) = e^{vs} \cdot \phi(e^s).$$

Stellen we

$$P(t) = e^{vt} \cdot \phi(e^t)$$

dan is $P(t)$ een op $-\infty < t < +\infty$ gedefiniëerde periodieke functie van t met de periode $|\tau| = |\log \alpha|$.

Dus

$$P(s) = e^{vs} \cdot \phi(e^s)$$

zodat

$$\phi(e^s) = e^{-vs} \cdot P(s)$$

of

$$\phi(x) = x^{-v} \cdot P(\log x).$$

q.e.d.

We passen deze stelling toe op de functie

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c^{bk}}{e^{c^k \cdot x} + 1} \quad (b > 0,\ c > 1).$$

Nu is $\phi(cx) = c^{-b} \cdot \phi(x)$ met als gevolg

$$\phi(x) = \frac{P(\log x)}{x^b};$$

en de teller van deze vorm is in het algemeen wel afhankelijk van x.
Conclusie:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c^{bk}}{a^{c^k}+1} = \frac{P(\log\log a)}{(\log a)^b} \quad (a > 1),$$

waarbij de functie P(t) in het algemeen ook nog afhankelijk zal zijn van b en c.

2. Deze paragraaf heeft betrekking op een tweetal vraagstukken uit het leerboek Calculus van T.M. Apostol [2].
Op pag. 456 van deel II wordt gevraagd, met behulp van de sommatieformule van Euler, aan te tonen dat

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-k^2} = \int_0^n e^{-x^2}\,dx + \frac{1}{2} + E(n),$$

waarbij

$$\lim_{n\to\infty} E(n) = 0.$$

In het onderstaande zal aangetoond worden dat de door dit vraagstuk gesuggereerde betrekking

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2} = \frac{1}{2} + \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

of

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \tag{2.1}$$

niet correct is.

---

[2] T.M. Apostol: Calculus, Blaisdell Publ. Comp., 1961 (2 delen).
Tijdens de samenstelling van dit rapport bleek, dat deze vraagstukken in de vierde druk van deel II niet meer voorkomen.

Schrijven we

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2\pi t} \quad (t > 0),$$

dan geldt volgens Poisson [3])

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\psi(\tfrac{1}{t}).$$

Het is duidelijk dat $\psi(t) > 1$ op $t > 0$, zodat

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2} = \psi(\tfrac{1}{\pi}) = \sqrt{\pi}\cdot\psi(\pi) > \sqrt{\pi}.$$

In tegenstelling tot (2.1) vinden we dus, dat

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2} > \sqrt{\pi}, \tag{2.2}$$

met als gevolg

$$\lim_{n\to\infty} E(n) \neq 0.$$

Voor de juiste waarde van deze limiet vinden we (numeriek)

$$\lim_{n\to\infty} E(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2} - \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx - \frac{1}{2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2} - \frac{\sqrt{\pi}+1}{2} = 0{,}00009\ldots\,.$$

Eveneens op pag. 456 van deel II vinden we het vraagstuk:

Toon aan dat voor $p = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2p}\cdot e^{-k^2} = \frac{(2p)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2p+1}\cdot p!}. \tag{2.3}$$

---

3) Zie E.C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, 1937, pag. 64.

Dat deze betrekking in het algemeen onjuist is blijkt uit onderstaande tabel [4]; hierin stelt S(p) het linkerlid en R(p) het rechterlid van (2.3) voor.

p	S(p)	R(p)
1	0,442...	0,443...
2	0,670...	0,664...
3	1,630...	1,661...
4	5,873...	5,815...
5	26,528...	26,171...
6	142,865...	143,942...
7	921,009...	935,627...
8	6998,543...	7017,203...
9	60399,549...	59646,230...
10	574568,125...	566639,194...

[4] De berekeningen zijn uitgevoerd op de Electrologica X-1 van het Mathematisch Centrum.