STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW-1969-011

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Dr. H. Jager

Tiendelige Breuken

§1. Inleiding.

Het uitgangspunt voor de beschouwingen in deze voordracht is de volgende

Stelling 1. Elk niet-negatief reëel getal x is te schrijven als

$$x = \sum_{k=-\infty}^{N} a_k 10^k, \quad a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad k = N, N-1, \dots . \tag{1}$$

Wanneer we nog afspreken dat we de situatie $a_m = a_{m-1} = a_{m-2} = \dots = 9$ niet toelaten, maar altijd vervangen door die waarbij $a_m = a_{m-1} = a_{m-2} = \dots = 0$, dan is de schrijfwijze (1) bovendien éénduidig.

Het gebruik van tiendelige breuken heeft in West-Europa vooral ingang gevonden door het bekende "De Thiende" van Simon Stevin, [6]. Thans worden de tiendelige breuken behandeld in de vijfde klas van de lagere school. Of stelling 1 werkelijk elementair is zullen we hier maar in het midden laten. Men kan (1) ook gebruiken als definitie voor de reële getallen.

We zullen in het volgende niet stelling 1 zelf vanuit een hoger standpunt bekijken, maar enige onderwerpen uit de getaltheorie bespreken die hun aanleiding vinden in de decimale voorstelling der getallen.

Opgemerkt zij nog dat de keuze van het grondtal 10 irrelevant is. Alle onderstaande beschouwingen gaan mutatis mutandis door voor de g-adische schrijfwijze, $g \geq 2$. De resultaten zijn dan in het bijzonder interessant voor $g = 2$.
Onze beschouwingen zullen betrekking hebben op twee speciale gevallen:

A. Het "negatieve stuk" in (1) ontbreekt, dat wil zeggen $a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \ldots = 0$. Stelling 1 zegt dan dat elk natuurlijk getal n op éénduidige wijze te schrijven is als

$$n = a_0 + a_1\, 10 + a_2\, 10^2 + \ldots + a_N\, 10^N,$$

het feit waarop onze positionele schrijfwijze van de natuurlijke getallen berust.

B. Het "niet-negatieve stuk" in (1) ontbreekt dat wil zeggen $x \in [0,1)$.

§2. De natuurlijke getallen.

Zij n een natuurlijk getal,

$$n = a_0 + a_1\, 10 + \ldots + a_N\, 10^N,\ a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ k = 0, 1, \ldots, N.$$

Dan definiëren we de arithmetische functie α door

$$\alpha(n) := a_0 + a_1 + \ldots + a_N,$$

dus $\alpha(n)$ is de som van de cijfers uit de decimale schrijfwijze van n.

De rij $\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \dots$ is te onregelmatig om er veel over te kunnen zeggen. Ieder natuurlijk getal komt er oneindig vaak in voor. Zoals bij meer arithmetische functies wordt door de rij der gemiddelden in te voeren de zaak voldoende glad gestreken om een asymptotische uitspraak te kunnen doen. Er geldt namelijk:

Stelling 2.

Zij $$A(x) := \sum_{n \le x} \alpha(n).$$

Dan is $$A(x) = \frac{9}{2 \log 10} x \log x + O(x), \quad x \to \infty.$$

Zie R. Bellman - H.N. Shapiro, [1] en S.C. Tang, [7].

Bewijs. We berekenen eerst $A(x)$ voor het geval x een macht van 10 is:

$$\begin{aligned} A(10^m) &= \sum_{n \le 10^m} \alpha(n) \\ &= \sum_{n \le 10^{m-1}} \alpha(n) + \sum_{n \le 10^{m-1}} \alpha(10^{m-1} + n) + \sum_{n \le 10^{m-1}} \alpha(2.10^{m-1} + n) + \dots \\ &+ \sum_{n \le 10^{m-1}} \alpha(9.10^{m-1} + n) \\ &= A(10^{m-1}) + 10^{m-1} + A(10^{m-1}) + 2.10^{m-1} + A(10^{m-1}) + \dots \\ &+ 9.10^{m-1} + A(10^{m-1}) - 9 \end{aligned}$$

Dus

$$(2) \quad A(10^m) = 10\, A(10^{m-1}) + \tfrac{1}{2}\, 9(10^m - 2)$$

Uit (2) volgt dat

$$\begin{aligned}
A(10^m) &= 10\,A(10^{m-1}) + \tfrac{1}{2}.9(10^m - 2)\\
10\,A(10^{m-1}) &= 10^2A(10^{m-2}) + \tfrac{1}{2}.9(10^m - 2.10)\\
10^2A(10^{m-2}) &= 10^3A(10^{m-3}) + \tfrac{1}{2}.9(10^m - 2.10^2)\\
&\;\;\text{- -}\\
10^{m-1}A(10) &= 10^mA(1) \qquad + \tfrac{1}{2}.9(10^m - 2.10^{m-1})
\end{aligned}$$

Optellen levert dan

$$(3) \qquad A(10^m) = \tfrac{1}{2}.9.m.10^m + 1,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Vervolgens berekenen we $A(x)$ met x van de vorm $c.10^m$, $c = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9$.

$$A(c.10^m) = \sum_{n\le 10^m} \alpha(n) + \sum_{n\le 10^m} \alpha(10^m + n) + \sum_{n\le 10^m} \alpha(2.10^m + n) + \ldots +$$

$$+ \sum_{n\le 10^m} \alpha((c-1)\ 10^m + n) =$$

$$= A(10^m) + 10^m + A(10^m) + 2.10^m + A(10^m) + \ldots +$$

$$+ (c-1)\ 10^m + A(10^m).$$

Onder gebruikmaking van (3) volgt hieruit dat

$$(4) \quad A(c.10^m) = \tfrac{1}{2}.9.c.m.10^m + c + \frac{c(c-1)}{2}\ 10^m.$$

Zij nu $\qquad x = a_0 + a_1\ 10 + a_2\ 10^2 + \ldots\ a_N\ 10^N$;

dan is $\quad A(x) = \sum\limits_{n\le a_N 10^N} \alpha(n) + \sum\limits_{a_N 10^N < n \le a_N 10^N + a_{N-1} 10^{N-1}} \alpha\ (n)$

$$+ \ldots + \sum_{a_N 10^N + \ldots + a_1 10 < n \le a_N 10^N + \ldots + a_0} \alpha(n)$$

$$= A(a_N\ 10^N) + a_N\ a_{N-1}\ 10^{N-1} + (A(a_{N-1}\ 10^{N-1}) +$$

$$+ (a_N+a_{N-1})a_{N-2}\ 10^{N-2} + A(a_{N-2}\ 10^{N-2}) + \dots + (a_N+a_{N-1}+\dots+a_1)a_0 + A(a_0)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N} A(a_\nu\ 10^\nu) + \sum_{\nu=1}^{N} (a_N+\dots+a_{N-\nu+1})a_{N-\nu}\ 10^{N-\nu})$$

$$= \frac{9}{2}\sum_{\nu=0}^{N} \nu\ a_\nu\ 10^\nu + \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{N} a_\nu(a_\nu-1)10^\nu + \sum_{\nu=1}^{N}\ \sum_{\mu=0}^{\nu-1} a_{N-\mu}\ a_{N-\nu}\ 10^{N-\nu};$$

bij de laatste overgang is gebruik gemaakt van (4).

Nu is $\frac{9}{2}\sum_{\nu=0}^{N} \nu\ a_\nu\ 10^\nu = \frac{9}{2}\sum_{\nu=0}^{N} N\ a_\nu\ 10^\nu - \frac{9}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1} (N-\nu)\ a_\nu\ 10^\nu$

$$= \frac{9}{2} Nx - \frac{9}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1} (N-\nu)\ a_\nu\ 10^\nu$$

verder geldt:

$$\frac{9}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1} (N-\nu)\ a_\nu\ 10^\nu \leq \frac{9^2}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1} (N-\nu)\ 10^\nu =$$

$$\frac{9^2}{2} N\ (1+10+\dots+10^{N-1}) - \frac{9^2}{2}\ (10+2.10^2+\dots+(N-1)10^{N-1})$$

$$= \frac{10^{N+1}}{2} - 5 - \frac{9}{2} N.$$

Nu is N vastgelegd door $10^N \leq x < 10^{N+1}$, dus

$$N = \left[\frac{\log x}{\log 10}\right]$$

We zien dus dat

$$\frac{9}{2}\sum_{\nu=0}^{N} \nu\ a_\nu\ 10^\nu = \frac{9}{2\log 10}\ x\log x + O(x)$$

Van de drie andere termen, $\sum_{\nu=0}^{N} a_\nu$, $\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{N} a_\nu(a_\nu-1)\ 10^\nu$ en $\sum_{\nu=1}^{N}\ \sum_{\mu=0}^{\nu-1} a_{N-\mu}\ a_{N-\nu}\ 10^{N-\nu}$ bewijst men zonder veel moeite dat ze $O(x)$ zijn. Hiermee is stelling 2 bewezen.

Het bovenstaande bewijs is van S.C. Tang, uit 1963, [7]. Deze auteur laat ook nog zien dat de restterm $O(x)$ niet verbeterd kan worden. Eerder, in 1948, was de stelling voor het dyadische stelsel bewezen door R. Bellman en H.N. Shapiro, [1], weliswaar met een zwakkere restterm.

Het kan verbazing wekken dat een voor de hand liggende stelling als stelling 2 pas in 1963 gevonden is. Meer inzicht in het gedrag van $\alpha(n)$ geeft de volgende stelling van I.Kátai en J. Mogyoródi uit 1969, [5], welke we hier alleen maar noemen.

Stelling 3. Zij $M_x = \frac{9}{2}\frac{\log x}{\log 10}$ en $D_x = (\frac{99}{12}\frac{\log x}{\log 10})^{\frac{1}{2}}$.

Zij y een reëel getal en $N_x(y)$ het aantal natuurlijke getallen n met

$$n \leq x,\ \alpha(n) < M_x + y\, D_x$$

Dan is

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N_x(y)}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\, dt$$

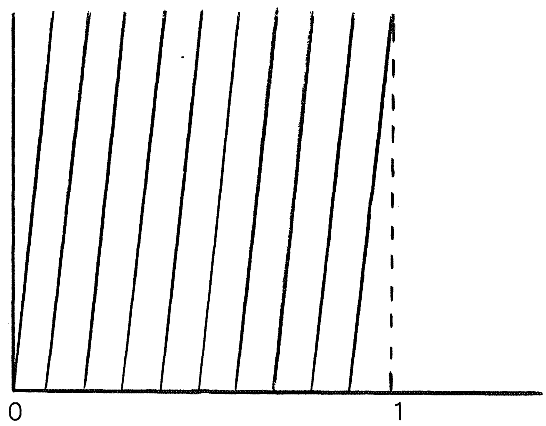
§3. Het interval [0,1).

Zij x_0 een punt uit het interval [0,1). Uitgaande van dit getal x_0 contrueren we dan een rij punten x_1, x_2, x_3, ... in [0,1) door in de decimale ontwikkeling van x_0 de komma steeds één plaats naar rechts te laten springen en datgene wat voor de komma komt te staan, te verwaarlozen.

Voorbeeldje: $x_0 = 0{,}71032\ldots$; dan is $x_1 = 0{,}1032\ldots$, $x_2 = 0{,}032\ldots$, $x_3 = 0{,}32\ldots$, ... Meer wiskundig gezegd: we beschouwen de transformatie T van [0,1) in zichzelf, gegeven door

$$Tx = 10x \pmod 1.$$

Dan is $x_0 = x$, $x_1 = Tx$, $x_2 = T^2x$, ... Figuur 1 stelt de grafiek van de transformatie T voor



figuur 1

Wanneer we nu van $[0,1)$ een kansruimte $(\Omega, \mathcal{L}, P)$ maken, $\Omega = [0,1)$, $\mathcal{L}$ de collectie van alle Borel-verzamelingen, P de Lebesgue-maat, dan is T <u>ergodisch</u>. Dit betekent dat T de volgende drie eigenschappen bezit

1) Als $A \in \mathcal{L}$, dan $T^{-1}A \in \mathcal{L}$.

2) T is maatbehoudend, dat wil zeggen dat voor iedere $A \in \mathcal{L}$ geldt:

$$P(T^{-1}A) = P(A)$$

3) Iedere invariante verzameling heeft of maat 0 of maat 1:

$$T^{-1}A = A \Rightarrow P(A) = 0 \text{ of } P(A) = 1.$$

Voor een bewijs vergelijk [2]. Zie ook [3]; onze transformatie T vertoont enige overeenkomst met de daarin beschreven "bakkerstransformatie". Er geldt nu de volgende belangrijke

<u>Stelling 4</u>. Zij T een ergodische transformatie van de maatruimte $(\Omega, \mathcal{L}, P)$, $P(\Omega) = 1$, en zij f een sommeerbare functie.

Dan is

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) = \int_\Omega f dP, \text{ voor bijna alle } x, \tag{5}$$

dat wil zeggen dat de x'en waarvoor (5) niet geldt, een verzameling van maat 0 vormen.

Voor het bewijs van deze stelling ontbreekt hier de tijd, we verwijzen naar [8], theorem 2, blz. 432.

We nemen nu eens voor f de karakteristieke functie van het interval $[\frac{7}{8}, \frac{8}{10})$. $\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)$ is dan het aantal zevens onder de eerste N decimalen van x; noteren we dit aantal met $A(x,7,N)$ dan zegt stelling 4 dat voor bijna alle x de $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A(x,7,N)$ bestaat en gelijk is aan $\frac{1}{10}$. Anders uitgedrukt: bijna alle x'en hebben in hun decimale ontwikkeling gemiddeld juist het goede aantal zevens, namelijk 1 op 10. Gaat men uit van het interval $[\frac{37}{100}, \frac{38}{100})$ dan ziet men op dezelfde wijze dat voor bijna alle x het blok 37 in de decimale ontwikkeling gemiddeld 1 op de 100 keer voorkomt. Enzovoort. Een getal waarin in de decimale ontwikkeling ieder blok decimalen gemiddeld het goede aantal keren voorkomt, heet normaal ten opzichte van de basis 10. We zien dus dat bijna alle getallen normaal zijn ten opzichte van de basis 10.

Meer algemener zien we dat voor bijna iedere x de rij $x_0, x_1, x_3, \ldots$ gelijkverdeeld is. Verder is voor bijna alle x

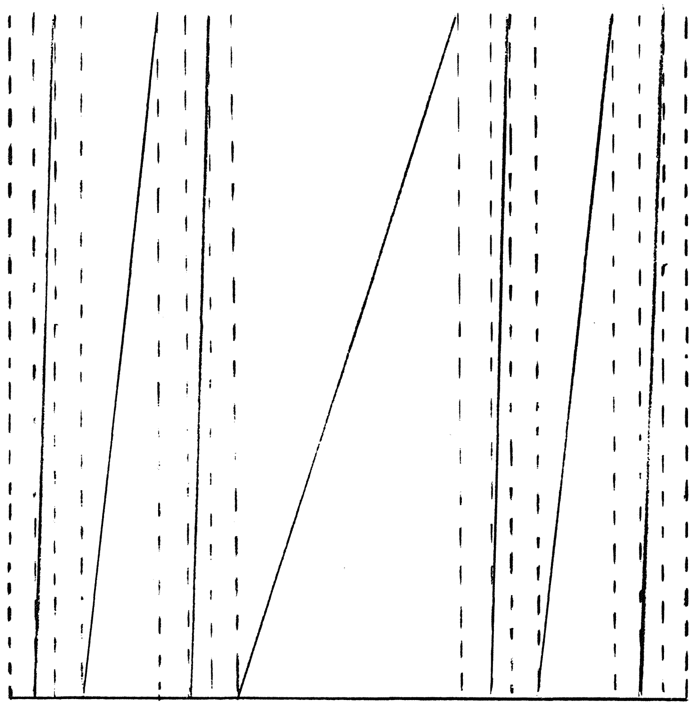
$$\lim_{N\to\infty} \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_{N-1}}{N} = \tfrac{1}{2}$$

en

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{x_0 x_1 \ldots x_{N-1}} = \frac{1}{e}$$

hetgeen men ziet door in stelling 4 respectievelijk te nemen $f(x) = x$ en $f(x) = \log x$.

We gaan nu weer uit van een vast getal $x \in [0,1)$, als decimale breuk geschreven. In plaats van nu de komma één plaats naar rechts te laten springen, laten we hem nu springen tot achter de eerste 7 in de decimale ontwikkeling. Alles wat voor de komma komt te staan wordt weer verwaarloosd. Het zo ontstane getal noemen we Sx. Indien in de decimale ontwikkeling van x helemaal geen zeven voorkomt, dan definieren we Sx = x.
In figuur 2 is getracht de grafiek van zo'n transformatie S te schetsen voor triadische breuken waarbij de komma achter de eerstvolgende 1 springt.



figuur 2

Voor tiendelige breuken laat zo'n grafiek zich nauwelijks meer schetsen. Men kan nu bewijzen dat de operator S ergodisch is.
Een precies bewijs loopt parallel aan het bewijs van stelling 3. 1, blz. 34, in [4].Men kan zelfs bewijzen dat S sterk mengend is.
Passen we dan weer stelling 4 toe dan vinden we resultaten zoals:

Voor bijna alle x is de rij $x, Sx, S^2x, \ldots$ gelijk verdeeld.

Voor bijna alle x is $\lim_{N\to\infty} \frac{x + Sx + \ldots + S^{N-1}x}{N} = \frac{1}{2}$.

Met behulp van verfijndere methoden kan men deze resultaten nog aanmerkelijk verscherpen. Zo geldt voor bijna alle x

$$\frac{x + Sx + \ldots + S^{N-1}x}{N} = \frac{1}{2} + \frac{\log^{\frac{3}{2}+\varepsilon} N}{\sqrt{N}}, \quad N \to \infty$$

waarin voor ε een willekeurig positief getal mag worden gelezen. Voor een bewijs, vergelijk [4].

Litteratuur

[1] Bellman, R. and H.N. Shapiro, On a problem in additive number theory, Annals of Mathematics, 49 (1948), 333-340.

[2] Halmos, P.R., Lectures on ergodic theory, Chelsea, 1956.

[3] Helmberg, G., Wiskundige grondslagen van het mixen van cocktails en het kneden van deeg, Math. Centrum, ZW 1965 - 008.

[4] Jager, H. and C. de Vroedt, Lüroth series and their ergodic properties, Ind. Math. 31 (1969), 31-42.

[5] Kátai, I. and J. Mogyoródi, On the distribution of digits, Publ. Math. Debrecen (1969), 57-68.

[6] Stevin, S., De Thiende, leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menschen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen zonder ghebrokenen, Leiden, Christoffel Plantijn, 1585.

[7] Tang, S.C., An inprovement and generalization of Bellman - Shapiro's theorem on a problem in additive number theory, Proc. Am. Math. Soc. 14 (1963), 199-204.

[8] Zaanen, A.C., Integration, North Holland Publ. Comp. 1967.