STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950-012

Bespreking over

GA Garreau's manuscript.

Absolute equivalence of general and row-finite T-matrices

W. Peremans

1950

Bespreking van een manuscript van G.A. Garreau, getiteld:

Absolute equivalence of general and row-finite T-matrices.

door W. Peremans.

Het artikel sluit in probleemstelling en terminologie direct aan bij het boek van R.G. Cooke, Infinite Matrices and Sequence Spaces, dat binnenkort zal verschijnen. Het is daarom misschien nuttig eerst enkele woorden te wijden aan dat gedeelte van het boek, waar het artikel betrekking op heeft.

Een analytische functie, gegeven door een machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

is, als de convergentiecirkel niet de natuurlijke grens van de functie is, ook nog voor waarden van z gedefinieerd buiten de convergentiecirkel.

De analytische voortzetting, verkregen door successievelijke verplaatsing van het middelpunt van de machtreeks, kan de waarde van de functie in dergelijke punten leveren, maar deze methode is vrij omslachtig en vereist meestal een keten van formules. Verscheidene auteurs hebben nu formules opgesteld, die direct de functie leveren in een groter gebied en wel met behulp van één enkele formule. Het doel van Cooke is nu al deze afzonderlijke methoden te generaliseren en te unificeren tot één enkele theorie. Het hulpmiddel dat hij daarbij gebruikt, is de door hem ontwikkelde theorie van de T-matrices. Deze T-matrices zijn matrices $a_{n,k}$ $(n = 1,2,\dots;\ k = 1,2,\dots)$ met aftelbaar oneindig veel rijen en kolommen, met de eigenschap, dat, als $\{z_k\}$ een willekeurige convergente rij complexe getallen is ($\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z$), en z_n' is gedefinieerd door $z_n' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,k} z_k$, dan ook $\lim\limits_{n\to\infty} z_n' = z$ is. Hij bewijst dat de volgende voorwaarden noodzakelijk en voldoende zijn opdat een matrix een T-matrix is:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \le M \quad \text{voor alle } n > n_0,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0 \text{ voor iedere vaste } k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \equiv A_n \to 1 \text{ als } n \to \infty.$$

Behalve deze matrices beschouwt hij ook semicontinue matrices $a_k(\omega)$, waarin ω een onbegrensde verzameling reële getallen, doorloopt. De transformatie wordt dan $z'(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) z_k$. De definitie van T-matrices en de voorwaarden voor een T-matrix zijn analoog met het vorige geval.

Kiezen we nu als rij, de rij der partiële sommen $s_k(z)$ van een machtreeks en vormen we met een T-matrix $a_k(\omega)$ de volgende betrekking

$$f(z) = \lim_{\omega\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)\, s_k(z),$$

dan is $f(z)$ binnen de convergentiecirkel van de machtreeks juist de door de machtreeks voorgestelde functie. Het is echter mogelijk, dat de formule ook voor waarden van z buiten de convergentiecirkel nog zin heeft. In dat geval levert de formule een stuk van de analytische voortzetting van de functie. Als dit voor een zeker gebied het geval is, noemt Cooke de matrix efficiënt voor dat gebied.

Hij kiest matrices van de gedaante

$$a_k(\omega) = \frac{g(k+1)\,\omega^{k+1}}{E(\omega)}$$

met $g(k) \geq 0$ voor alle k, en $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^k$ ~~is~~ een gehele functie. Nu moet $g(k)$ zo gekozen worden, dat de matrix voor alle Taylorreeksen efficiënt is, hetzij in een "principal star domain", hetzij in een "partial star domain". Hij slaagt erin dit zo te doen, dat bekende formules van Borel, Mittag-Leffler, Lindelöf en Malmqvist speciale gevallen van zijn formule worden.

De matrices, die zo verkregen zijn behoren tot wat Cooke noemt de "powerful" klasse, omdat ze efficiënt zijn voor sterk divergente rijen, zoals de partiële sommen van machtreeksen buiten de convergentiecirkel, maar dikwijls niet efficiënt voor zwak divergente rijen. Matrices, die efficiënt zijn voor de laatste (maar meestal niet voor de eerste) rijen (b.v. de vorming van Cesàro-gemiddelden) noemt hij de "delicate" klasse. De vraag rijst of een matrix "kwadratisch" moet zijn om tot de "powerful" klasse te kunnen behoren. Hierin is ~~niet~~ met een kwadratische ~~matrix~~ bedoeld een matrix die geen onder-semi-matrix is. Een onder-semi-~~matrix~~ matrix is een matrix $a_{n,k}$, waarvoor geldt $a_{n,k} = 0$ voor $k > n$. Dit blijkt niet het geval te zijn; Cooke geeft een voorbeeld van een onder-semi-matrix die efficiënt is voor $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ in een gebied buiten $|z| = 1$.

In het artikel van Garreau worden nu verdergaande resultaten in deze richting bewezen.

We definiëren daartoe eerst het begrip "absoluut aequivalent" voor T-matrices, als volgt:

Als $z'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} z_k$, $z''_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} z_k$, dan heten de T-matrices $a_{n,k}$ en $b_{n,k}$ absoluut aequivalent voor een klasse van rijen $\{z_n\}$ als altijd $\lim_{n\to\infty} (z'_n - z''_n) = 0$ is.

Het is duidelijk, dat absoluut aequivalente matrices efficiënt zijn in hetzelfde gebied, mits $\{s_k(z)\}$ in dat gebied tot de klasse behoort, waarvoor de absolute aequivalentie is gedefinieerd.

Garreau bewijst nu voor een zeker type T-matrices (waar de gevallen van Borel enz. onder vallen), dat ze voor de rijen $\{z^n\}$ voor alle complexe z absoluut aequivalent zijn met rij-eindige matrices. Hierin zijn rij-eindige matrices, zulke, waarvoor iedere rij slechts eindig veel elementen $\neq 0$ bevat.

Nu is een partiële som van $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ gelijk aan $\frac{1-z^n}{1-z}$, zodat een T-matrix, die $\{z^n\}$ tot nul sommeert, de partiële sommen tot $\frac{1}{1-z}$ sommeert. De bovenstaande absoluut aequivalente matrices zijn dus voor $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ efficiënt in hetzelfde gebied. Een stelling van Okada staat nu toe, hieruit een zelfde conclusie te trekken voor willekeurige machtreeksen met convergentiestraal >0.

Ten slotte is het zeer eenvoudig de rij-eindige matrix te vervangen door een onder-semi-matrix die efficiënt is in hetzelfde gebied, n.l. door rijen zo nodig te herhalen.

Het bewijs van de door Garreau bewezen stelling is vrij eenvoudig. Het onderwerp als geheel, zoals het door Cooke wordt behandeld, lijkt mij wel belangrijk.

Of het voor publicatie een bezwaar is, dat in het artikel voortdurend wordt gerefereerd naar een nog niet verschenen boek, zonder welk het artikel bezwaarlijk te lezen is, kan ik niet beoordelen.

Nog enkele punten van notatie, waarop ik de aandacht wil vestigen zijn de volgende:

Er wordt in het artikel met behulp van getallen in ronde haakjes verwezen naar bladzijden van het boek van Cooke, maar ook naar formules in het artikel zelf. Dat is soms ietwat verwarrend.

Er wordt in de formules soms dezelfde index k gebruikt voor een sommatie-index en voor een vaste index (de ene in de noemer, de andere in de teller van een breuk). Cooke doet dit in zijn boek trouwens ook.

De grens voor k midden op blz. 4 is niet juist en heeft trouwens toch niet veel zin, omdat er toch al termen van lagere orde verwaarloosd zijn. Dat er een grens bestaat, is duidelijk.