STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1952 - 012

Voordracht in de serie Actualiteiten

H.J.A. Duparc

24 mei 1952

CODERINGSPROBLEMEN

1952

Rapport ZW 1952-012

Voordracht door H.J.A. Duparc in de serie
Actualiteiten op 24 Mei 1952.

CODERINGSPROBLEMEN

§1. Inleiding.

In het vervolg zullen wij elk der cijfers 0,1,...,9 coderen door een vast aantal nullen en énen. Het is duidelijk dat dit vaste aantal n ten minste 4 moet zijn, want met 3 of minder cijfers 0 en 1 zijn ten hoogste 8 verschillende groeperingen te maken. Wij schrijven kortweg $x = (x_1,\ldots,x_n)$. De getallen $x_1,\ldots,x_n$ noemen wij de coördinaten van het getal x.

Neemt men 0 = (0,0,0,0); 1 = (0,0,0,1); 2 = (0,0,1,0); 3 = (0,0,1,1); ...; 9 = (1,0,0,1), codeert men elk der getallen volgens de binaire schrijfwijze, dan heeft men voor x = 0,1,...,9

$$x = \sum_{n=0}^{3} x_{n+1}\, 2^{3-n}.$$

De getallen $(x_1,\ldots,x_n)$ zijn dan eenduidig door het getal x vastgelegd en omgekeerd. Wij zullen echter in het vervolg ook andere coderingen beschouwen dan degene, die corresponderen met de binaire schrijfwijze van het getal x.

Een getal in de decimale schrijfwijze coderen wij door elk zijner cijfers achtereenvolgens te coderen. Heeft zo'n getal m cijfers, dan bezit het derhalve mn coördinaten. Zelfs in het geval dat men voor n de minimale keuze n = 4 doet, heeft zo'n getal i.h.a. meer coördinaten, dan wanneer men het direct geheel in de duale schrijfwijze codeert.

Als twee natuurlijke getallen a en b gegeven zijn door hun coördinaten, is hun som ook bekend, zodat de coördinaten daarvan bepaald zijn door die van de getallen a en b zelf. Hetzelfde geldt voor hun product. Beperken wij ons eerst tot het geval $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ en onderstellen wij $a = (a_1,\ldots,a_n)$; $b = (b_1,\ldots,b_n)$. De som van a en b is dan gegeven door het aantal t zijner tientallen (dat 0 of 1 is) en het aantal s der eenheden. Elke coördinaat zowel van s als van t is dan een functie van de 2n getallen $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n$. Wij schrijven

$$s_\nu = s_\nu(a_1,\ldots,a_n,\ b_1,\ldots,b_n);\quad t_\nu = t_\nu(a_1,\ldots,a_n,\ b_1,\ldots,b_n)\qquad (\nu = 1,\ldots,n),$$

ofwel kortweg

$$s = s(a,b);\ t = t(a,b).$$

Zijn de functies s_ν en t_ν alle bekend, dan is hiermede ook door herhaaldelijk toepassen van deze formules de som van getallen van meer cijfers te vinden. Zo is b.v. voor de som efg van twee getallen ab en cd van twee cijfers (waarbij a,...,g de cijfers der beschouwde getallen in de decimale schrijfwijze aangeven)

$e = s(t(a,c),t(t(b,d),s(a,c)))$; $f = s(t(b,d),s(a,c))$; $g = s(b,d)$.

Op geheel analoge wijze kunnen producten van getallen in decimale schrijfwijze gevonden worden zodra men behalve de optelloperaties ook kent de functies

$$p_\nu = p_\nu(a_1,\dots,b_n) \text{ en } q_\nu = q_\nu(a_1,\dots,b_n),$$

die ons van twee natuurlijke onder de 10 gelegen getallen a en b opleveren de codering der getallen p en q, die resp. aangeven het aantal eenheden en tientallen van het product ab.

Het is duidelijk dat de functies p_ν, q_ν, s_ν en t_ν afhangen van de wijze van codering der getallen 0,1,...,9. Alvorens hierop nader in te gaan bewijzen wij eerst de volgende fundamentele stelling:

Iedere functie $f(x_1,\dots,x_N)$, die evenals elk der erin optredende variabelen $x_1,\dots,x_N$ slechts de waarden 0 en 1 aanneemt en die voor iedere mogelijke keuze der grootheden $x_1,\dots,x_N$ een voorgeschreven waarde aanneemt, is te schrijven in de gedaante

$$(1)\qquad f(x_1,\dots,x_N) = \sum c_{\nu_1\nu_2\dots\nu_k}\, x_{\nu_1}x_{\nu_2}\dots x_{\nu_k};$$

in deze som loopt k van 0 tot N en bij zo'n k is $(\nu_1,\dots,\nu_k)$ een willekeurige combinatie van k der getallen (1,...,N) en het geval k = 0 is bedoeld de ene term c op te leveren.

Het bewijs wordt gegeven door te laten zien dat de coëfficiënten c_ν in het rechterlid van (1) zo gekozen kunnen worden dat voor iedere keuze van $(x_1,\dots,x_N)$ de functie $f(x_1,\dots,x_N)$ inderdaad de voorgeschreven waarde aanneemt. Het aantal onbekende coëfficiënten c_ν is gelijk aan $\binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \dots + \binom{N}{N} = 2^N$, terwijl het aantal opgelegde voorwaarden even groot is.

Substitutie van (0,0,...,0) levert ons direct de waarde van c. Zij voorts voor k = 0,1,...,n reeds elke $c_{\nu_1\dots\nu_k}$ gevonden. Elk der coëfficiënten $c_{\nu_1\dots\nu_{n+1}}$ is nu te vinden door $x_{\nu_1} = \dots = x_{\nu_{n+1}} = 1$ te nemen en de overige variabelen x_ν gelijk aan 0 te nemen. Men krijgt dan een vergelijking, waarin $c_{\nu_1\dots\nu_{k+1}}$ optreedt, zodat uit deze betrekking de gewenste coëfficiënt onmiddellijk gevonden wordt. Hiermede is de fundamentele stelling bewezen.

Opmerkingen.

In het geval dat slechts voor minder dan de 2^N mogelijke keuzen der grootheden $x_1,\dots,x_N$ de waarde der functie $f(x_1,\dots,x_N)$ voorgeschreven is, kan men voor de overige keuzen van $(x_1,\dots,x_N)$ de waarde der functie willekeurig voorschrijven, zodat dan tenminste één stel coëfficiënten c_ν te vinden is waarvoor (1) geldt.

Ook in het geval dat elk der grootheden $x_1,\dots,x_N$ de p waarden

0,1,...,p-1 kan aannemen (waarbij p een willekeurig priemgetal is) en voor elk of voor een aantal van dergelijke keuzen van $(x_1,\dots,x_N)$ de functie $f(x_1,\dots,x_N)$ een voorgeschreven waarde aanneemt, die gelijk is aan 1 der getallen 0,1,...,p-1, bestaat er een analoge schrijfwijze

$$f(x_1,\dots,x_N) = \sum c_{a_1 a_2 \dots a_N} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_N^{a_N},$$

waarin elk der grootheden $a_1, a_2, \dots, a_N$ gelijk is aan 0,1,... of p-1. De coëfficiënten c_a worden ook in dit geval bepaald door lineaire vergelijkingen, waarvan de coëfficiëntendeterminant gelijk blijkt te zijn aan $((p-1)!!)^{Np^{N-1}}$; hierin is $(p-1)!! = 1!2!\dots(p-1)!$ en de betreffende coëfficiëntendeterminant is dus $\not\equiv 0 \pmod p$.

De fundamentele stelling voor functies is direct uit te breiden op stellen functies. Zij luidt dan: Ieder stel van m functies $f_1(x_1,\dots,x_N),\dots,f_m(x_1,\dots,x_N)$, die evenals de grootheden $x_1,\dots,x_N$ slechts de waarden 0 en 1 aannemen en voor iedere of sommige van alle mogelijke keuzen der grootheden $(x_1,\dots,x_N)$ voorgeschreven waarden (0 of 1) aannemen, is van de gedaante

$$f_\mu(x_1,\dots,x_N) = \sum c_{\mu\nu_1\dots\nu_k} x_1^{\nu_1}\dots x_k^{\nu_k} \qquad (\mu = 1,\dots,m),$$

waarbij het somteken weer een analoge betekenis heeft als in (1).

In het geval dat m = N is, leveren de functies ons uit een stel van N grootheden $(x_1,\dots,x_N)$ een nieuw stel van N grootheden $(y_1,\dots,y_N)$. Wij schrijven dit in operatorvorm $y = Fx$.

Op de bovenbeschouwde functies p_ν, q_ν, s_ν en t_ν is het zojuist gevondene van toepassing. Men heeft daarbij $N = 2n$; $m = n$.

Wij beschouwen thans de functies p_ν en s_ν eens nader. Op grond van het gevondene is elke functies p_ν bepaald door de keuze der codering van elk der cijfers 0,1,...,9. Dat is in het bijzonder het geval met de functies $s_\nu(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)$ of kortweg $S(a,b)$ in het geval $b = 1$ is. Deze formules geven ons de codering van a+1 uit die van $a \pmod{10}$. Geven wij ze aan met S_1, dan hebben wij dus $a+1 = S_1 a = S(a,1)$; $a+b = S_1^b a = S(a,b)$, waarvoor wij ook wel zullen schrijven $S_b a$. Wij merken op dat de operatoren S_b een groep vormen. Men heeft nl. $S_b S_c = S_d$, waarbij $d \equiv b+c \pmod{10}$ en $0 \leqq d \leqq 9$. De groep dezer operatoren is isomorph met de additieve groep der restklassen $K_0,\dots,K_9$ mod 10. Evenzo heeft men voor de verzameling der operatoren P_b, waarbij onder $c = P_b a$ wordt verstaan $c_\nu = p_\nu(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)$ voor $\nu = 1,\dots,n$, dat $P_u P_v = P_w$ dan en slechts dan als $K_u K_v = K_w$. De verzameling der operatoren P_b vormt dus evenmin als die der restklassen K_b een multiplicatieve groep.

§ 2. Keuze der codering.

Door de codering der getallen 0,1,...,9 te geven zijn de operatoren S_b en P_b zoals wij al opmerkten alle bepaald. Dit is ook het geval als men geeft de codering van een der getallen 0,1,...,9 en ook de operator S_1(of S_3,S_7 of S_9), waarbij echter de operator S_1 de orde 10 (en geen lagere orde) moet bezitten, d.w.z. $S_1^{10} = S_o$ en $S_1^g \neq S_o$ voor $g = 1,\dots,9$.

Wij merken nog op dat de orde der operatoren S_3,S_7 en S_9 ook 10 is, dat die van elk der operatoren S_2,S_4,S_6 en S_8 gelijk is aan 5 en de orde van S_5 gelijk is aan 2.

De operatoren P_3,P_7 en P_9 bezitten de orde 4, terwijl bij de operatoren P_o,P_2,P_4,P_5,P_6 en P_8 feitelijk van geen orde sprake is.

In de praktijk is het nuttig een codering zo te kiezen dat de operatoren S_b en P_b alle zo eenvoudig mogelijk worden. Een bijzonder eenvoudige keuze van een operator S_b zou die zijn waarbij deze slechts de coördinaten permuteert. Allereerst houdt dat in dat bij elk der cijfers 0,1,...,9 een gelijk aantal van de coördinaten gelijk is aan 0. Zij dit aantal h, dan moet dus $\binom{n}{h} \geqq 10$ zijn, dus $n \geqq 5$. Wij kunnen echter meer zeggen, omdat die operator S_1 de orde 10 hebben moet. Is S_1 slechts een permutatie der n coördinaten, dan bezit S_1 een orde die gelijk is aan het K.G.V. der getallen $n_1,n_2,\dots,n_k$, waarbij $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Bijgevolg is pas bij $n = 7$ een opteloperator mogelijk, die de coördinaten der gecodeerde getallen permuteert. Wij zoeken thans echter naar weliswaar minder eenvoudige operatoren, waarbij evenwel het aantal der vereiste coördinaten kleiner kan zijn.

Nog op betrekkelijk eenvoudige wijze te realiseren zijn de grootheden x_1x_2 en $(x_1'x_2')'$. Hierin wordt onder x_i' verstaan $1-x_i$. Deze zijn door dioden te verwezenlijken terwijl de grootheden $x_1'x_2'\dots x_k'$, $(x_1'x_2'\dots x_k')'$ en $(x_1x_2)'$ een ingewikkelder apparatuur[1] vereisen (resp. triode, cathode-volger en pentode), waarbij k willekeurig is.

Wij hebben dus thans na te gaan of er optel- en vermenigvuldigoperatoren zijn te vinden in de gevallen dat men uitsluitend dioden toelaat of dat men ook nog de ingewikkelder apparatuur nodig heeft. Bij $n \geqq 7$ behoeft, zoals wij zagen voor additie van 1 zelfs geen diode gebruikt te worden. Bij $n = 7$ kan men de algemene additieoperatoren inderdaad door dioden verwezenlijken. Neemt men nl.

$$\begin{aligned}
0 &= (0,0,0,0,1,0,1)\\
1 &= (1,0,0,0,0,1,0)\\
2 &= (0,1,0,0,0,0,1)\\
3 &= (0,0,1,0,0,1,0)\\
4 &= (0,0,0,1,0,0,1)\\
5 &= (0,0,0,0,1,1,0)\\
6 &= (1,0,0,0,0,0,1)\\
7 &= (0,1,0,0,0,1,0)\\
8 &= (0,0,1,0,0,0,1)\\
9 &= (0,0,0,1,0,1,0)
\end{aligned}$$

1) Verg. de vorige voordracht in deze serie: Logische synthese van rekencircuits, door B.J. Loopstra, Rapport ZW 1952-010.

dan is S_1 de operator

$$f_1(x) = x_5,\quad f_2(x) = x_1,\ f_3(x) = x_2,\ f_4(x) = x_3,\ f_5(x) = x_4,$$
$$f_6(x) = x_7,\quad f_7(x) = x_6.$$

Men vindt dan voor $s = x+y$ de algemene optelformules

$$\begin{aligned}
s_1 &= x_1y_5 + x_2y_4 + x_3y_3 + x_4y_2 + x_5y_1\\
s_2 &= x_1y_1 + x_2y_5 + x_3y_4 + x_4y_3 + x_5y_2\\
s_3 &= x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_5 + x_4y_4 + x_5y_3\\
s_4 &= x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + x_4y_5 + x_5y_4\\
s_5 &= x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1 + x_5y_5\\
s_6 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_6y_7 + x_7y_6\\
s_7 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_6y_6 + x_7y_7
\end{aligned}$$

en op grond van de grondstelling voor operatoren zijn ook de formules voor $t(x,y)$, $p(x,y)$ en $q(x,y)$ gemakkelijk te vinden.

De hier optredende formules (en ook die voor de 3 genoemde overige operatoren) hebben de eigenschap, dat er slechts één term in optreedt, die van nul verschilt. Terwijl in het algemeen voor het vinden van de som $x_i + x_j$ (mod 2) uit x_i en x_j trioden vereist zijn, is dit bij een som met deze bijzondere eigenschap niet zo en kan men daarbij met dioden toe.

Bij onze codering waarbij weliswaar de operaties eenvoudig verlopen, maar het aantal variabelen vrij groot is, bestaat tussen de coördinaten der getallen de relatie $\sum_{i=1}^{5} x_i = x_6 + x_7 = 0$, zodat x_5 en x_7 overtallige coördinaten zijn. Wij kunnen dus ook werken met een codering waarbij $n = 5$ is en waarin men heeft

0 = (0,0,0,0,0)
1 = (1,0,0,0,1)
2 = (0,1,0,0,0)
3 = (0,0,1,0,1)
4 = (0,0,0,1,0)
5 = (0,0,0,0,1)
6 = (1,0,0,0,0)
7 = (0,1,0,0,1)
8 = (0,0,1,0,1)
9 = (0,0,0,1,1).

Het nadeel hierbij is dat men bij de somformules hierboven ook reeds b.v. bij s_1 de beschikking moest hebben over de grootheden x_5 en y_5, maar deze moeten nu gevonden worden uit $1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ resp. $1 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4$, hetgeen meer dan alleen dioden vereist.

Inderdaad vindt men in het nieuwe systeem waarvan wij de coördinaten van het getal x in verband met het vorige aangeven met (x_1,x_2,x_3,x_4,x_6) voor de som $s = x+y$ dat

$$s_6 = x_6(1-y_6) + (1-x_6)y_6 \equiv x_6 + y_6$$

zodat trioden enz. onontbeerlijk zijn.

Tenslotte onderzoeken wij het geval n=4 nader en laten zien dat het gebruik van uitsluitend dioden bij de optelling bepaalde coderingen uitsluit. Beschouw de operator S_1, die aan ieder cijfer zijn opvolger toevoegt, d.w.z. onderzoek de formules

$$y_h = s_h(x_1,x_2,x_3,x_4) \qquad (h = 1,2,3,4),$$

waarbij y = x+1 is. Elke formule $s_h(x_1,x_2,x_3,x_4)$ is volgens onze grondstelling een polynoom, dat opgebouwd is uit één of meer der termen x_i, x_ix_j, $x_ix_jx_k$, $x_1x_2x_3x_4$. Laten wij slechts de productoperatoren x_ix_j toe, dan mag zo'n som slechts dan uit meer termen bestaan als die niet tegelijkertijd gelijk zijn aan 1, d.w.z. als hun product nul is. Daar met dioden ook nog de operator $x_i \circ x_j = (x_i'x_j')'$ te verwezenlijken is, mag onze som ook hieruit op te bouwen termen bevatten mits alweer niet tegelijkertijd twee der termen gelijk zijn aan 1. Zoekt men alle producten van 4 coördinaten a,b,c en d uit, die te verwezenlijken zijn met dioden, dan vindt men onderstaande mogelijkheden of degene, die er uit door permutatie der grootheden x_1,x_2,x_3 en x_4 te vinden zijn. Men lette er hierbij op dat voor gedurige producten waarin zowel de elementaire als de met een nulletje aangegeven vermenigvuldiging de associatieve wet niet geldt. In de producten is de volgorde der bewerkingen de natuurlijke aangegeven door de volgorde der factoren. Men berekene eerst het product der eerste twee factoren, vermenigvuldige dit met de derde enz., terwijl slechts haakjes hierin wijziging brengen.

$$
\begin{aligned}
&x_1\\
&x_1x_2\\
x_1\circ x_2 &= x_1x_2+x_1+x_2\\
&x_1x_2x_3\\
x_1x_2\circ x_3 &= x_1x_2x_3+x_1x_2+x_3\\
x_1\circ x_2x_3 &= x_1x_2x_3+x_1x_3+x_2x_3\\
x_1\circ x_2\circ x_3 &= x_1x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_1+x_2+x_3\\
&x_1x_2x_3x_4\\
x_1x_2x_3\circ x_4 &= x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3+x_4\\
x_1x_2\circ x_3x_4 &= x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_4+x_3x_4\\
x_1x_2\circ x_3\circ x_4 &= x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2+x_3x_4+x_3+x_4\\
x_1\circ x_2x_3x_4 &= x_1x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4\\
x_1\circ x_2x_3\circ x_4 &= x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4\\
x_1\circ x_2\circ x_3\circ x_4 &= x_1x_2x_3x_4+\sum x_1x_2x_3+\sum x_1x_2+\sum x_1\\
x_1x_2\circ(x_3x_4) &= x_1x_2x_3x_4+x_1x_2+x_3x_4\\
x_1x_2\circ(x_3\circ x_4) &= x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2+x_3x_4+x_3+x_4\\
x_1\circ x_2(x_3\circ x_4) &= x_1x_2x_3x_4+\sum x_1x_2x_3+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4.
\end{aligned}
$$

In geval bij deze producten twee of meer der factoren samenvallen, leveren zij geen uitdrukking op van een andere structuur dan de reeds opgesomde.

Elke formule $s_h(x_1,x_2,x_3,x_4)$ (h = 1,2,3,4) deel uitmakende van de

---

$$x_1\circ x_2\circ x_3x_4 = x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4$$

operator S_1 bestaat dan uit de som van een of meer van de opgesomde termen of van de daaruit door permutatie der grootheden x_1, x_2, x_3, x_4 verkregen termen.

Het is duidelijk dat geen der getallen 0,1,...,9 een codering (0,0,0,0) kan bezitten want wegens $0 0 = 0$ en $0 \circ 0 = 0$ zou dan elk product ook 0 zijn en de operator S_1, die uit deze producten is opgebouwd, zou aan het getal (0,0,0,0) weer dit getal toevoegen in strijd met de betekenis van S_1. Omdat $1.1 = 1$ en $1 \circ 1 = 1$ is zou evenzo de operator S_1 aan het getal (1,1,1,1) weer het getal (1,1,1,1) toevoegen, wat evenmin mogelijk is, zodat ook geen der getallen de codering (1,1,1,1) mag bezitten. In de codering van elk getal treden dus zowel cijfers 0 als cijfers 1 op.

Welke mogelijkheden nu open blijven dient nader te worden onderzocht. Om tenslotte een denkbeeld te geven hoe men dit onderzoek kan doen verlopen, beschouwen wij de codering, waarbij 4 getallen gecodeerd worden met 3 coördinaten 0 en 1 coördinaat 0, terwijl de overige 6 getallen alle met 2 cijfers 0 en 2 cijfers 1 worden gecodeerd. Wij leggen daarbij aan de structuur der formules S_1 een verder gaande beperking op door te eisen dat alle erin optredende producten slechts uit twee factoren bestaan. Deze beperking komt voort uit practische overwegingen. Bij producten van meer dan 2 factoren is nl. een extra apparatuur nodig om de stromen waardoor de coördinaten worden gerepresenteerd te versterken. Bij een product van twee factoren is dit nog niet nodig.

In dit speciale geval treden slechts als bouwstenen der formules van S_1 op de 3 producten x_i, $x_i x_j$ en $x_i \circ x_j$. Letten wij nog op de eis dat geen $s_h(x_1, x_2, x_3, x_4)$ mag bestaan uit twee termen, die voor een optreden de keuze van (x_1, x_2, x_3, x_4) beide gelijk zijn aan 1, dan is voor elke s_h slechts het volgende zevental formules mogelijk

$$x_i ; x_i + x_j x_k ; x_i + x_j x_k + x_k x_l ; x_i + x_j x_k + x_k x_l + x_l x_j ; \sum_n x_i x_j ; x_i \circ x_j ; x_i \circ x_j + x_k x_l .$$

Hierin zijn de getallen i,j,k en l twee aan twee verschillend en $\sum_n$ wordt uitgestrekt over n verschillende termen van de gedaante $x_i x_j$; uiteraard is daarbij $1 \leq n \leq 6$. Men kan nu aantonen dat de bovengenoemde codering dan onmogelijk is. Immers bij 4 der 10 getallen is $x_1 = 1$. Wij gaan dus na of inderdaad ook bij b.v. de formule $s_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_i + x_j x_k$ voor precies 4 der getallen (x_1, x_2, x_3, x_4) de waarde van s_1 gelijk is aan 1. Nu is $s_1 = 1$ als $x_i = 1$ en $x_j x_k = 0$. Uit $x_i = 1$ volgt automatisch $x_j x_k = 0$, dus reeds in de vier gevallen dat $x_i = 1$ is, is $s_1 = 1$. Als echter $x_i = 0$ is, is $s_1 = 1$ in het enige geval dat $x_j = x_k = 1$, zodat nu 5 getallen x de eigenschap zouden hebben dat hun opvolger een 1e coördinaat 1 bezit, wat echter niet het geval is. Op analoge wijze sluit men het optreden van de andere mogelijkheden voor s_1 uit, afgezien van $s_1 = x_i$, maar dit leidt tot het reeds eerder besproken geval van permutatie, dat eveneens niet kan optreden..