STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963 - 012

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. P. Mullender

27 november 1963

Eenvoudige waarheden

1963

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963-012

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de

Serie "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr. P. Mullender

27 november 1963

Eenvoudige waarheden

1. Evenals men elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit kan beschouwen, kan men minder elementaire onderwerpen vaak van een elementair standpunt uit benaderen. Het is merkwaardig hoe soms heel belangrijke en ook wel moeilijke stellingen en theorieën kunnen voortvloeien uit betrekkelijk simpele overwegingen. Een zeer duidelijk voorbeeld van zulk een op eenvoudige waarheden gebaseerde theorie is wel de Meetkunde der Getallen. Natuurlijk is het ook in de Meetkunde der Getallen niet bij eenvoudige waarheden gebleven, maar daar willen wij het niet over hebben.

2. De probleemstelling was aanvankelijk van arithmetisch karakter: Gevraagd oplossingen te vinden van een ongelijkheid

$$f(x_1,\dots,x_n) \leq 1$$

in gehele waarden van de onbekenden $x_1,\dots,x_n$.

Het is duidelijk dat deze probleemstelling een geometrische interpretatie toelaat. Beschouw namelijk een n-dimensionale ruimte van punten $(x_1,\dots,x_n)$. De ongelijkheid bepaalt in die ruimte een zekere puntverzameling K en de vraag is, of K ook punten bevat met louter gehele coördinaten.

Men kan de probleemstelling ook eerst generaliseren door voor $x_1,\dots,x_n$ lineaire vormen te substitueren

$$x_\nu = a_{\nu 1}u_1 + \ldots + a_{\nu n}u_n + a_\nu \qquad (\nu = 1,\ldots,n)$$

met

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta \neq 0,$$

en dan te vragen naar oplossingen in gehele $u_1,\ldots,u_n$.

Meetkundig komt dit erop neer dat men de verzameling K aan een affiene transformatie onderwerpt alvorens de vraag te stellen of er punten met louter gehele coördinaten in voorkomen. Men kan het ook anders uitleggen, namelijk, dat K onveranderd gelaten wordt, maar dat het "rooster" van punten met gehele coördinaten eerst aan een affiene transformatie wordt onderworpen.

Er zijn dan nog twee varianten van het probleem:

a) Het homogene probleem, waarbij men zich beperkt tot het geval dat $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$. In het algemeen beschouwt men in dit geval verzamelingen K die de oorsprong als inwendig punt bevatten en zondert men de oplossing $u_1=\ldots=u_n=0$ (dat is dus de oorsprong) als triviale oplossing uit.

b) Het inhomogene probleem, waarbij bovengenoemde beperking niet geldt. Men ziet onmiddellijk dat de punten $(x_1,\ldots,x_n)$ die corresponderen met punten $(u_1,\ldots,u_n)$ met gehele $u_1,\ldots,u_n$ verder uit elkaar komen te liggen naarmate $|\Delta|$ groter is. Men kan nu vragen of er een getal $C > 0$ bestaat, zodanig, dat er altijd een niet-triviale oplossing van het probleem is als $|\Delta| < C$;en,zo ja, wat is dan de grootst mogelijke waarde van C?

3. We beperken ons tot het homogene probleem.

Zij X de verzameling van alle punten $x = (x_1,\ldots,x_n)$ met reële $x_1,\ldots,x_n$ en zij U de verzameling van alle punten $u = (u_1,\ldots,u_n)$ met gehele $u_1,\ldots,u_n$.

Zij A de aanduiding van een $n \times n$-matrix met determinantwaarde det $A \neq 0$. Met A duiden we tevens aan de verzameling

$$\{ x \mid x = A.u,\ u \varepsilon U \},$$

welke verzameling we een (homogeen) rooster noemen.

We beschouwen de ongelijkheid

$$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \leqq 1, \quad \text{of} \quad |x| \leqq 1.$$

De door deze ongelijkheid bepaalde puntverzameling is de n-dimensionale eenheidsbol om de oorsprong O en zal door ons worden aangeduid met K.

We bespreken enige methoden om in dit geval tot het door ons gewenste resultaat te komen, namelijk, de bepaling van een getal C, zodanig, dat ieder rooster A met $d(A) = |\det A| < C$, behalve O, nog minstens één punt met K gemeen heeft.

4. We maken gebruik van de volgende [1)]

Stelling 1 (Blichfeldt): Zij A een rooster en $\overline{K}$ een begrensde puntverzameling met volume $V > d(A) = |\det A|$. Het is dan mogelijk door een evenwijdige verschuiving de verzameling $\overline{K}$ in zodanige stand te brengen dat zij twee punten van A bevat.

Het bewijs van deze stelling (van Birkhoff) is een eerste voorbeeld van de toepassing van simpele overwegingen ter verkrijging van een belangrijk resultaat:

Het rooster verdeelt de ruimte in congruente "roostercellen". De in verschillende cellen gelegen gedeelten van $\overline{K}$ vervangt men door congruente stukken van één roostercel. Het volume van die cel is d(A) en het volume van de in die cel ondergebrachte delen van $\overline{K}$ is $V > d(A)$. Er zullen dus zeker twee punten van $\overline{K}$ op elkaar vallen, d.w.z., er zijn twee punten van $\overline{K}$ die een congruente ligging in verschillende cellen hebben. Hieruit volgt onmiddellijk het gestelde.

Zij het volume van de n-dimensionale eenheidsbol K gelijk aan V_n. We nemen dan een rooster A met $d(A) < \frac{1}{2^n} V_n$. Als $\overline{K}$ nu een n-dimensionale bol met straal $\frac{1}{2}$ voorstelt, dan kan $\overline{K}$ volgens stelling 1 zo verschoven worden dat er twee punten van A in vallen. Maar dat betekent dat er twee punten x' en x'' van A zijn waarvoor geldt $|x'-x''| \leqq 1$ en

---

1) De formulering van de stellingen is niet die van de aangeduide auteurs, maar is aangepast aan onze behoeften.

derhalve een punt $x=x'-x''$ van A ongelijk aan O in K. Het door ons gezochte getal C kunnen we dus gelijk kiezen aan $\frac{1}{2^n} V_n$.

5. Op overeenkomstige wijze als stelling 1 kan men aantonen

<u>Stelling 2</u> (Blichfeldt): Zij A een rooster, k een natuurlijk getal en $\overline{K}$ een begrensde puntverzameling met volume $V > k.d(A)$. Het is dan mogelijk door een evenwijdige verschuiving de verzameling $\overline{K}$ in zodanige stand te brengen dat zij k+1 punten van A bevat.

Zij $\overline{K}$ thans een n-dimensionale bol met straal

$$r = \left(\frac{k}{2(k+1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

en dus met volume

$$V = \left(\frac{k}{2(k+1)} \right)^{n/2} . V_n \, .$$

We nemen een rooster A met $d(A) < \frac{1}{k} V$. Volgens stelling 2 kunnen we $\overline{K}$ dan zo verschuiven dat er k+1 punten van A in liggen, bijv. de punten $x^1, \ldots, x^{k+1}$.

We maken gebruik van een eenvoudige betrekking die tussen elk willekeurig stel verschillende punten (vectoren) geldt en in het bijzonder voor $x^1, \ldots, x^{k+1}$ en een willekeurig daaraan toe te voegen punt x:

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\mu=\lambda+1}^{k+1} (x^\lambda - x^\mu)^2 \leqq (k+1) \cdot \sum_{\lambda=1}^{k+1} (x^\lambda - x)^2 - \left\{ \sum_{\lambda=1}^{k+1} (x^\lambda - x) \right\}^2 . \qquad \text{(I)}$$

Hieruit volgt, als we voor x het (verplaatste) middelpunt van $\overline{K}$ nemen,

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\mu=\lambda+1}^{k+1} (x^\lambda - x^\mu)^2 \leqq (k+1)^2 r^2 .$$

Dus geldt voor zekere λ en μ $(\lambda \neq \mu)$

$$(x^\lambda - x^\mu)^2 \leqq \frac{2(k+1)}{k} \cdot r^2 = 1 .$$

En dit betekent dat K een punt van A ongelijk aan O bevat en dat we de waarde van C dus kunnen verhogen tot

$$\frac{1}{k}\left(\frac{k}{2(k+1)}\right)^{n/2} . V_n \, .$$

Voor oneven n blijkt deze uitdrukking zo groot mogelijk te zijn als $k = \frac{n+1}{2}$ en voor even n als $k = \frac{n+2}{2}$.

6. De stellingen 1 en 2 kunnen verder gegeneraliseerd worden tot

Stelling 3 (Blichfeldt): Zij A een rooster. Zijn $a_1,\ldots,a_k$ willekeurig gekozen positieve getallen en $K_1,\ldots,K_k$ begrensde puntverzamelingen met volumen, respectievelijk, $V_1,\ldots,V_k$, dan kan men dit complex van puntverzamelingen door een evenwijdige verschuiving in zodanige stand brengen dat

$$d(A).(a_1N_1+\ldots+a_kN_k) \geqslant a_1V_1+\ldots+a_kV_k,$$

als $N_1,\ldots,N_k$ de aantallen punten van A voorstellen, die na de verschuiving respectievelijk in $K_1,\ldots,K_k$ terecht komen.

We zullen deze stelling niet toepassen, maar eerst een andere interpretatie van de genoemde stellingen geven.

7. Als A een rooster is en $\overline{K}$ een begrensde puntverzameling, dan definiëren we een dichtheidsfunctie ∂ op X aldus:

Zij ρ de karakteristieke functie van $\overline{K}$, d.w.z. $\rho(x) = 1$ als $x \in \overline{K}$ en $\rho(x) = 0$ als $x \notin \overline{K}$. Voor alle $x \in X$ definiëren we nu

$$\partial(x) = \sum_{y \in A} \rho(x-y).$$

De gemiddelde dichtheid (gemiddeld over de gehele ruimte X) is nu gelijk aan het quotiënt van het volume V van $\overline{K}$ en het volume d(A) van elke roostercel.

Stelling 1 kan thans aldus geformuleerd worden:

Als de gemiddelde dichtheid groter is dan 1, dan is er minstens één punt met dichtheid groter dan 1.

Vervangen we in deze formulering het getal 1 door k, dan staat er stelling 2. Maar ook stelling 3 laat dezelfde formulering toe, indien men de dichtheid ∂ definieert door

$$\partial(x) = \sum_{y \varepsilon A} (a_1\rho_1(x-y) + \ldots + a_k\rho_k(x-y)),$$

waarbij ρ_λ de karakteristieke functie van K_λ voorstelt ($\lambda=1,\ldots,k$).

8. Een nog verdere generalisatie van de stellingen van Blichfeldt is mogelijk:

Stelling 4. (Remak): Zij $\rho(x)$ integreerbaar over de gehele ruimte X doch slechts in een begrensd gebied ongelijk aan 0. Zij A een rooster. Er is dan een punt $\bar{x} \varepsilon X$, zodanig, dat

$$d(A) \,.\, \sum_{x \varepsilon A} \rho(x-\bar{x}) \geqq \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx_1 \ldots dx_n \,.$$

Definiëren we ∂ door

$$\partial(x) = \sum_{y \varepsilon A} \rho(x-y),$$

dan kunnen we ook de inhoud van deze stelling weergeven met de uitspraak: Er is minstens één punt waarin de dichtheid niet kleiner is dan de gemiddelde dichtheid.

We definiëren

$$\rho(x) = \max(0, \tfrac{1}{2} - |x|^2)$$

en, bij gegeven rooster A,

$$\partial(x) = \sum_{y \varepsilon A} \rho(x-y). \qquad \text{(II)}$$

We nemen aan dat, behalve O, geen punt van A in de n-dimensionale eenheidsbol K om O ligt. We beweren dan dat $\partial(x) \leqq \frac{1}{2}$ voor alle $x \varepsilon X$.

Indien $x^1, \ldots, x^{k+1}$ de punten van A zijn wier afstand tot x kleiner is dan $\frac{1}{\sqrt{2}}$, dan is

$$\partial(x) = \sum_{\lambda=1}^{k+1} \rho(x^\lambda - x) = \frac{k+1}{2} - \sum_{\lambda=1}^{k+1} (x^\lambda - x)^2.$$

Dus, op grond van (I) en onze aanname omtrent A,

$$\partial(x) \leqq \frac{k+1}{2} - \frac{k}{2} = \tfrac{1}{2}\,.$$

Hieruit volgt dat ook de gemiddelde dichtheid kleiner moet zijn dan $\frac{1}{2}$, d.w.z.

$$\frac{1}{d(A)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx_1 \ldots dx_n \leqq \tfrac{1}{2},$$

of

$$d(A) \geqq 2V_n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\tfrac{1}{2}-r^2)\,dr^n = \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{2^{n/2}} \cdot V_n \quad .$$

We kunnen het getal C dus verder verhogen tot

$$\frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{2^{n/2}} \cdot V_n \quad .$$

9. Indien wij uitgaan van een rooster A, dat behalve de oorsprong O geen punten met de bol K gemeen heeft, dan is de afstand tussen twee verschillende punten van A minstens 1. Ieder roosterpunt geeft een bijdrage tot de waarde van de dichtheidsfunctie ∂ , zoals die gedefinieerd is in (II), doch slechts in punten die minder dan $\frac{1}{\sqrt{2}}$ van dat roosterpunt verwijderd zijn. Om ieder roosterpunt kan men dus een bol aanbrengen met straal $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, waarbinnen alleen dat roosterpunt een bijdrage levert tot de waarde van ∂ . Dat betekent dat wij binnen die bollen de waarde van ∂ zonder bezwaar tot $\frac{1}{2}$ kunnen verhogen, aangezien dan de uitspraak, dat $\partial(x) \leqq \frac{1}{2}$ voor alle $x \varepsilon X$, haar geldigheid behoudt. Hieruit volgt

$$d(A) \geqq 2V_n \left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \tfrac{1}{2}\,dr^n - \int_{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^2\,dr^n \right] =$$

$$= \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{2^{n/2}} \cdot V_n \cdot (1+ \tfrac{n}{2}\,(\sqrt{2}-1)^{n+2}).$$

Dit resultaat kan nog verder worden verscherpt door een nauwkeuriger toepassing van de betrekking (I). Op die wijze kan men namelijk aantonen dat de ongelijkheid $\partial(x) \leqq \frac{1}{2}$ ook nog blijft gelden voor alle $x \varepsilon X$, indien men $\rho(x)$ aldus definieert:

$$\rho(x) = \max(0, \tfrac{1}{2}-|x|^2) \text{ als } |x| \geqq \tfrac{1}{2},$$
$$\rho(x) = (1-|x|)^2 \text{ als } \tfrac{1}{2} \geqq |x| \geqq 1-\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\rho(x) = \tfrac{1}{2} \text{ als } 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \geqq |x| \quad .$$

Deze verscherping heeft Blichfeldt zelf bewezen. Een nog verdere verscherping met behulp van een verfijning van Blichfeldt's methode is gegeven door Rankin.

10. Van der Corput en Schaake hebben in plaats van de hier door ons beschouwde ongelijkheid onderzocht de ongelijkheid

$$(|x_1|^g + \ldots + |x_n|^g)^{1/g} \leqq 1 \quad \text{met vaste } g \geqq 2. \qquad \text{(III)}$$

Duiden we het linkerlid van deze ongelijkheid aan met $F(x)$, dan kunnen we de volgende ongelijkheid opstellen, die, naar Van der Corput en Schaake hebben aangetoond, geldt voor elk willekeurig stel van $k+1$ vectoren $x^1,\ldots,x^{k+1}$ en een willekeurig daaraan toe te voegen vector x (alle behorend tot X):

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\mu=\lambda+1}^{k+1} F(x^\lambda - x^\mu)^g \leqq (k+1) \cdot \sum_{\lambda=1}^{k+1} F(x^\lambda - x)^g. \qquad \text{(IV)}$$

Met behulp van deze ongelijkheid kunnen we gemakkelijk aantonen, dat voor ieder rooster A met de eigenschap dat $F(x'-x'') \geqq 1$ voor elk tweetal roosterpunten x' en x'', indien de dichtheidsfunctie ∂ wordt gedefiniëerd door (II) met $\rho(x) = \max(0, 2^{1-g} - F(x)^g)$, geldt $\partial(x) \leqq 2^{1-g}$ voor alle $x \varepsilon X$.
Dit leidt tot de volgende waarde van C (natuurlijk met betrekking tot de nieuwe ongelijkheid):

$$\frac{g}{n+g} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{g}(g-1)}} \cdot V_n^{(g)},$$

als $V_n^{(g)}$ het volume is van het gebied bepaald door de ongelijkheid (III).

Dit resultaat kan onmiddellijk verbeterd worden tot

$$\frac{g}{n+g} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{g}(g-1)}} \cdot V_n^{(g)} \cdot \left(1 + \frac{n}{g}(2^{1-\frac{1}{g}}-1)^{n+g}\right),$$

door op dezelfde wijze als in het geval $g=2$ overal waar de dichtheidsfunctie slechts van één roosterpunt een positieve bijdrage ontvangt de waarde van de dichtheidsfunctie te verhogen tot 2^{1-g}.

11. De boven beschreven resultaten steunen telkens op twee waarheden: In de eerste plaats op de stellingen van Blichfeldt en Remak, die wij hebben samengevat in de uitspraak dat er altijd een punt is waarin de dichtheid minstens even groot is als de gemiddelde dichtheid. En in de tweede plaats op een betrekking van het type van die gegeven in (I), of eventueel een ongelijkheid als die gegeven in (IV).

Welnu, C.A. Rogers heeft in principe dezelfde methode toegepast op een ander probleem, namelijk dat van de ongelijkheid

$$|x_1 . x_2 \dots x_n| \leqq 1, \qquad \text{(V)}$$

waarin $x_1, \dots, x_n$ de coördinaten van het punt x voorstellen. Hij heeft daartoe deze ongelijkheid in verband gebracht met een andere,

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leqq 1, \qquad \text{(VI)}$$

die weer een begrensde puntverzameling bepaalt. Stel

$$G(x) = |x_1 \dots x_n| \text{ en } H(x) = |x_1| + \dots + |x_n| \text{ voor alle } x \varepsilon X.$$

Zij V(H) het volume van de puntverzameling bepaald door (VI). En zij A een rooster dat, behalve O, geen punten gemeen heeft met de verzameling bepaald door (V) (er zijn zulke roosters). Rogers heeft dan in eerste instantie aangetoond dat voor elk stel punten $x^1, \dots, x^{k+1}$ van A en elk punt $x \varepsilon X$ geldt

$$\sum_{\lambda=1}^{k+1} H(x^\lambda - x) \geqq (k + \tfrac{1}{2} - \log 2) . \tfrac{1}{2} n \sqrt{e}.$$

Hieruit volgt, als men definieert

$$\rho(x) = \tfrac{1}{2} n \sqrt{e} - H(x) \text{ als } H(x) < \tfrac{1}{2} n \sqrt{e} \quad \text{en overigens} \quad \rho(x) = 0$$

en, evenals tevoren,

$$\partial(x) = \sum_{y \varepsilon A} \rho(x-y),$$

dat voor alle $x \varepsilon X$ geldt

$$\partial(x) \leq (\tfrac{1}{2}+\log 2) \cdot \tfrac{1}{2}n\sqrt{e}.$$

Toepassing van de stellingen van Blichfeldt en Remak geeft dan

$$d(A) \geq \frac{(n\sqrt{e})^n}{(\frac{1}{2}+\log 2).(n+1)!} .$$

Ook dit resultaat kan onmiddellijk verbeterd worden door vergroting van $\partial(x)$ in de omgeving van de roosterpunten. Rogers heeft echter zijn eigen resultaat weer aanzienlijk verbeterd door een verbetering van zijn uitkomst betreffende het verband tussen de functies $G(x)$ en $H(x)$, d.w.z., tussen de ongelijkheden (V) en (VI).

Literatuur:

H.F. Blichfeldt, A new principle in the geometry of numbers with some applications, Trans.Amer.Math.Soc. 15 (1914), p.227-235.

H.F. Blichfeldt, The minimum value of quadratic forms, and the closest packing of spheres, Math.Ann. 101 (1929), p.605-608.

R. Remak, Vereinfachung eines Blichfeldtschen Beweises aus der Geometrie der Zahlen, Math. Zeitschr. 26 (1927), p. 694-699.

J.G.v.d. Corput und G. Schaake, Anwendung einer Blichfeldtschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen, Acta Arithm. 2 (1936), p.152-160.

R.A. Rankin, On the closest packing of spheres in n dimensions, Annals of Mathematics 48 (1947), p.1062-1081.

C.A. Rogers, The product of n homogeneous linear forms, J.L.M.S. 24 (1949), p.31-39.

C.A. Rogers, The product of n real homogeneous linear forms, Acta Mathematica 82 (1950), p.185-208.