STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1964 - 012

Voordracht in de serie
"Actualiteiten"

Over het bestaan van goed gelijkverdeelde rijen in compacte ruimten

P.C. Baayen

31 oktober 1964

1964

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1964-012

Voordracht in de serie "Actualiteiten"
31 oktober 1964

Over het bestaan van goed gelijkverdeelde rijen in compacte ruimten

P.C. Baayen

1. Gelijkverdeling in compacte ruimten

In 1916 introduceerde H. WEYL [11] het begrip "gelijkverdeling modulo 1". Een rij reële getallen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ heet gelijkverdeeld modulo 1 als de resten modulo 1 van deze getallen, d.w.z. de getallen

$$\{x_n\} = x_n - [x_n] \tag{1}$$

zo gelijkmatig verdeeld komen te liggen over het eenheidsinterval $I = [0,1]$ dat <u>ieder</u> deelinterval $A = [a,b]$ van I op den duur zijn evenredig deel ontvangt:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_A(\{x_n\}) = \text{lengte } A = b-a. \tag{2}$$

(Met χ_A is hier aangeduid de karakteristieke functie van de verzameling A).

In het aangehaalde artikel bewees H. WEYL o.a. het volgende criterium:

<u>Stelling 1</u>. Dan en slechts dan is de rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gelijkverdeeld modulo 1 indien

(3) $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(t)dt$$

voor iedere op I continue reëelwaardige functie f.

Dit criterium leent zich bijzonder goed voor het generaliseren van het begrip gelijkverdeling tot algemenere situaties. Zo definieerde B. ECKMANN [3] dit begrip voor rijen in compacte groepen; vervolgens breidde E. HLAWKA [7] het uit tot rijen in willekeurige compacte Hausdorff-ruimten, voorzien van een genormeerde Borel-maat:

Definitie 1 : Zij X een compacte Hausdorff-ruimte en μ een genormeerde Borel-maat in X. Een rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in X heet μ-gelijkverdeeld in X indien

(4) $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_X f d\mu$$

voor iedere continue reeëlwaardige functie f of X.

Ingeval X een compacte groep is en μ de Haar-maat in X zijn de μ-gelijkverdeelde rijen in X juist de rijen die gelijkverdeeld zijn in de zin van B. ECKMANN [3]. Neemt men i.h.b. voor X de additieve groep der reële getallen modulo 1 (te identificeren met het interval $[0,1)$), dan is de Haar-maat μ op X juist de Lebesgue-maat op $[0,1)$, zodat we het gelijkverdelingsbegrip van H. WEYL terug vinden.

Men kan overigens met definitie 1 aequivalente definities geven die aansluiten bij de oorspronkelijke definitie van H. WEYL; zie G. HELMBERG und J. CIGLER [4].

E. HLAWKA [7] bewees dat er - althans in separabele ruimten - altijd vele gelijkverdeelde rijen bestaan.

Stelling 2. Zij X een separabele compacte Hausdorff-ruimte, en zij μ een genormeerde Borel-maat in X. Bijna iedere rij in X is μ-gelijkverdeeld.

2. Goed gelijkverdeelde rijen

Indien een rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μ-gelijkverdeeld is in een compacte Hausdorff-ruimte X, dan is ook de rij $(x_{k+n})_{n=1}^{\infty}$ (k een vast natuurlijk getal) μ-gelijkverdeeld, immers

$$(5)\qquad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_{k+n}) \right| \leq \frac{2k}{N} \cdot ||f||$$

(waar $||f|| = \max\limits_{x \in X} |f(x)|$), en dus, voor continue f:

$$(6)\qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_{k+n}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_X f d\mu.$$

I.h.a. zal echter de snelheid, waarmee het gemiddelde $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_{k+n})$ de integraal $\int_X f d\mu$ benadert voor $N\to\infty$, essentieel afhangen van k.

Definitie 2. Zij X een compacte Hausdorffruimte, μ een genormeerde Borel-maat op X. Een rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ heet goed μ-gelijkverdeeld in X indien voor iedere continue reëelwaardige functie f op X

$$(7)\qquad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_{k+n}) \to \int_X f d\mu \quad \text{voor } N\to\infty$$

uniform in k.

M.a.w. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ is goed μ-gelijkverdeeld indien er voor iedere $\varepsilon > 0$ en iedere continue f op X een $N_0 = N_0(\varepsilon, f)$ bestaat, zodanig, dat

$$(8)\qquad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_{k+n}) - \int_X f d\mu \right| < \varepsilon$$

voor alle $N \geq N_0$ en voor ieder natuurlijk getal k. Ingeval X een compacte groep is, en μ de Haar-maat op X, gebruiken we de uitdrukking "goed gelijkverdeelde rij" in plaats van "goed μ-gelijkverdeelde rij".

Het begrip "goed gelijkverdeelde rij" is ingevoerd door E. HLAWKA [6] onder de naam "gleichmässig gleichverteilte Folge"; onafhankelijk van hem werd het voor het geval der reële getallen modulo 1 geintroduceerd door G.M. PETERSEN [9] onder de benaming "well distributed sequence"

Voorbeelden van goed gelijkverdeelde rijen, in het klassieke geval van de reële getallen modulo 1, zijn de rijen $(n\theta)_{n=1}^{\infty}$, θ irrationaal. Andere voorbeelden en een studie van de eigenschappen dezer rijen vindt men in E. HLAWKA [6], F.R. KEOGH, B. LAWTON and G.M. PETERSEN [8], A.F. DOWIDAR and G.M. PETERSEN [2] en G.M. PETERSEN and M.T. McGREGOR [10].

Goed gelijkverdeelde rijen zijn speciale gelijkverdeelde rijen. Men kan zich afvragen hoe speciaal ze zijn. Het blijkt dat de eis van goede gelijkverdeling veel zwaarder is dan de voorwaarde voor gewone gelijkverdeling: waar bijna iedere rij in een separabele compacte Hausdorff-ruimte met Borel-maat μ μ-gelijkverdeeld is (stelling 2), is bijna geen rij in zo'n ruimte goed μ-gelijkverdeeld (tenzij μ geconcentreerd is in één punt):

Stelling 3. (G. HELMBERG and A.B. PAALMAN-DE MIRANDA [5]). Zij X een separabele compacte Hausdorff-ruimte, en zij μ een genormeerde Borel-maat in X die niet in één punt geconcentreerd is. Dan is bijna iedere rij in X niet goed μ-gelijkverdeeld.

Dit resultaat doet de vraag rijzen of er dan wel altijd goed μ-gelijkverdeelde rijen bestaan, voor iedere compacte Hausdorff-ruimte X en voor iedere genormeerde Borel-maat in X. Voor separabele ruimten is deze vraag bevestigend te beantwoorden (P.C. BAAYEN and Z. HEDRLÍN [1]). In het verdere van deze voordracht zullen we een bewijs van dit feit schetsen.

3. Het niet-atomaire geval

Iedere separabele compacte Hausdorff-ruimte is metriseerbaar. Zonder verlies van algemeenheid mogen we daarom in het volgende aannemen dat in X een metriek ρ is gegeven die aansluit bij de topologie van X. De diameter van een deelverzameling A van X, gemeten met ρ, noemen we d(A). De rand van A geven we aan met b(A), het inwendige met A^0.

<u>Definitie 3</u>. Zij $\varepsilon > 0$. Een (X, μ, ε)-quasi-overdekking van X is een eindig stelsel $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ van deelverzamelingen van X met de volgende eigenschappen:

(Q1) iedere C_i is compact; $d(C_i) < \varepsilon$ $\quad (1 \leq i \leq n)$;

(Q2) $\mu C_i > 0$ en $\mu b(C_i) = 0$ $\quad (1 \leq i \leq n)$;

(Q3) $C_i^0 \cap C_j^0 = \emptyset$ voor $i \neq j$ $\quad (1 \leq i,j \leq n)$;

(Q4) $\mu(X \backslash \cup\mathcal{C}) = 0$.

Het is niet moeilijk aan te tonen dat een dergelijke quasi-overdekking altijd bestaat.

<u>Lemma 1</u>. Zij X een compacte metrische ruimte, μ een Borel-maat op X. Voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een (X, μ, ε)-quasi-overdekking.

Stel nu dat μ niet-atomair is, d.w.z. $\mu(\{x\}) = 0$ voor <u>iedere</u> $x \in X$. Dan verloopt het bewijs van het bestaan in X van een goed μ-gelijkverdeelde rij als volgt.

We beginnen met een $(X, \mu, \frac{1}{2})$-quasi-overdekking $\{C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \ldots, C_{n(1)}^{(1)}\}$ van X, en voegen aan iedere $C_i^{(1)}$ toe een gesloten deelinterval $\Phi(C_i^{(1)})$ van I, op zodanige wijze dat

(1) twee intervallen $\Phi(C_i^{(1)})$, $\Phi(C_j^{(1)})$, $i \neq j$, hebben slechts eindpunten gemeen;

(2) de lengte van $\Phi(C_i^{(1)})$ is steeds gelijk aan $\mu(C_i^{(1)})$.

Vervolgens nemen we voor elk der $C_i^{(1)}$ een $(C_i^{(1)}, \mu, \frac{1}{4})$-quasi-overdekking $\left\{C_{i1}^{(2)}, C_{i2}^{(2)}, \ldots, C_{in_i}^{(2)}\right\}$, en voegen aan iedere $C_{ik}^{(2)}$ toe een deelinterval $\Phi(C_{ik}^{(2)})$ van $\Phi(C_i^{(1)})$, weer op zodanige wijze dat voor verschillende $C_{ik}^{(2)}$ de bijbehorende intervallen slechts eindpunten gemeen hebben, terwijl de lengte van $\Phi(C_{ik}^{(2)})$ gelijk is aan $\mu C_{ik}^{(2)}$. Zo voortschrijdende (en bij de n^e stap werkend met $(C^{(n-1)}, \mu, \frac{1}{2^n})$-quasi-overdekkingen) verkrijgen we een functie Φ die aan bepaalde deelverzamelingen van X toevoegt deelintervallen van I.

Daar μ niet-atomair is nadert $\mu C^{(n)}$ tot nul voor $n \to \infty$ (immers $dC^{(n)} \leq \frac{1}{2^n}$), zodat ook de lengte van $\Phi(C^{(n)})$ tot nul nadert voor $n \to \infty$. Zij nu X_1 de verzameling van al die punten van X die voor iedere n tot het inwendige van één der $C^{(n)}$ behoren. Uit (Q2) en (Q4) volgt:

$\mu X_1 = 1$. Uit (Q3) volgt voorts dat er voor iedere $x \in X$, en iedere n <u>precies één</u> $C^{(n)} = C^{(n)}(x)$ is met $x \in (C^{(n)})^0$. Zij

$$f(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi(C^{(n)}(x)). \tag{9}$$

Dan kan men aantonen dat de functie f, gedefinieerd op X, deze verzameling afbeeldt op een overal dichte deelverzameling I_1 van I.

Nu weten we reeds dat er modulo 1 goed gelijkverdeelde getallenrijen bestaan (cf. §2); omdat I_1 overal dicht is volgt dat er zelfs een goed gelijkverdeelde rij $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ is in I waarvan alle elementen tot I_1 behoren (zie e.g. [6] of [8], of [12], pag. 31). Zij nu, voor iedere n, $x_n \in X_1 \subset X$ zodat $f(x_n) = y_n$; dan blijkt de rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in X goed μ-gelijkverdeeld te zijn. (Voor de details van het bewijs verwijzen we naar [1]). Dus:

<u>Lemma 2.</u> Zij X een separabele compacte Hausdorff-ruimte en μ een niet-atomaire genormeerde Borel-maat in X. Er bestaan in X goed μ-gelijkverdeelde rijen.

4. <u>Het algemene geval</u>

We bewijzen nu het aangekondigde resultaat (zonder beperkingen voor de maat):

<u>Stelling 4.</u> Zij X een separabele compacte Hausdorff-ruimte, μ een genormeerde Borel-maat in X. Er bestaat in X een goed μ-gelijkverdeelde rij.

<u>Bewijs</u>

Zij $X_0 = \{x \in X : \mu(\{x\}) > 0\}$; de verzameling X_0 is eindig of aftelbaar. Als $X_0 = \emptyset$ volgt het gestelde uit lemma 2; we stellen dus $X_0 \neq \emptyset$. Verder nemen we aan dat $\mu X_0 \neq 1$ en dat X_0 niet eindig is (als aan een van deze voorwaarden niet is voldaan kunnen we in hoofdzaak hetzelfde bewijs gebruiken; het bewijs wordt alleen maar eenvoudiger). Zij $\{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$ een aftelling van X_0 ; zij $\alpha_0 = 1 - \mu X_0$, en zij $\alpha_n = \mu(\{x_n\})$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

We definieren op X een nieuwe genormeerde Borel-maat ν als volgt: als B een willekeurige Borel-verzameling is in X, dan zij

$$(10) \qquad \nu B = \frac{\mu(B\setminus X_0)}{\mu(X\setminus X_0)} .$$

Volgens lemma 2 is er in X een goed ν-gelijkverdeelde rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Zij $I_0 = [0,\alpha_0]$ en, voor $n \geq 1$,

$$(11) \qquad I_n = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right].$$

Zij $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ een goed gelijkverdeelde rij in I waarvan geen enkel element een eindpunt is van een der intervallen I_n, en zij $(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de deelrij bestaande uit alle $y_n \in I_0$.

We definieren in X een rij $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ op de navolgende wijze. Als $n = n_i$, voor zekere i, dan nemen we $u_n = x_i$; als n niet als index voorkomt bij de deelrij $(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, zodat $y_n \in I_k$ voor een $k > 0$, dan nemen we $u_n = z_k$. We zullen aantonen dat de rij $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ goed μ-gelijkverdeeld is in X.

Zij $\varepsilon > 0$, en zij ϕ een continue reëelwaardige functie op X. Daar $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 1$ is er een n_0 zodanig dat

$$(12) \qquad \sum_{n>n_0} \alpha_n < \frac{\varepsilon}{8} \cdot (1 + ||\phi||)^{-1} .$$

Zij, voor willekeurige niet-negatieve gehele getallen n, k, N,

$$(13) \qquad j_n(k,N) = \sum_{m=1}^{N} \chi_{I_n}(y_{m+k}),$$

$$(14) \qquad j(k,N) = \sum_{n>n_0} j_n(k,N) = \sum_{m=1}^{N} \chi_{\bigcup_{n>n_0} I_n}(y_{m+k}) .$$

Daar $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ goed gelijkverdeeld is in I bestaat er een $N_1 = N_1(\varepsilon,\phi)$ zodanig dat voor alle $N \geq N_1$

$$(15) \qquad \left| \frac{1}{N} j_n(k,N) - \alpha_n \right| < \varepsilon \cdot (1 + 4n_0 \cdot ||\phi||)^{-1}$$

$$(n = 0, 1, \ldots, n_0),$$

$$(16) \qquad \left| \frac{1}{N} j\,(k,N) - \sum_{n>n_0} \alpha_n \right| < \frac{\varepsilon}{8} \circ (1 + ||\phi||)^{-1} ,$$

uniform in k. Uit (16) en (12) volgt dat voor $N \geq N_1$

$$(17) \qquad \left| \frac{1}{N} j\,(k,N) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \cdot (1 + ||\phi||)^{-1} ;$$

Uit (15) volgt het bestaan van een constante K zodanig dat

$$(18) \qquad \left| \frac{j_n(k,N)}{N} \right| < K$$

voor alle $n \geq n_0$, alle k en alle N.

Daar $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ goed ν-gelijkverdeeld is in X bestaat er een $N_2 = N_2(\varepsilon,\phi)$ zodanig dat voor $N \geq N_2$

$$(19) \qquad \left| \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \phi\,(x_{m+k}) - \int_X \phi d\nu \right| < \frac{\varepsilon}{8} \cdot K^{-1} ,$$

uniform in k. Zij $N_0 \geq \max\,(N_1,N_2)$ zo groot gekozen dat $j_0(k,N) > N_2$ voor alle $N \geq N_0$ en alle k. Dan geldt - indien we sommen over s opeenvolgende waarden van de parameter i kort aangeven door het symbool $\sum_s^i$ -

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \phi(U_{k+m}) - \int_X \phi d\mu \right| \leq \left| \frac{j_0(k,N)}{N} \cdot \frac{1}{j_0(k,N)} \sum_{j_0(k,N)}^{i} \phi(x_i) - \right.$$

$$\left. - \int_{X \setminus X_0} \phi d\mu \right| + \sum_{n=1}^{n_0} \left| \frac{j_n(k,N)}{N} \phi(z_n) - \int_{\{z_n\}} \phi d\mu \right| + \left| \frac{j(k,N)}{N} . ||\phi|| \right| +$$

$$+ \left| \sum_{n>n_0} \int_{\{z_n\}} \phi d\mu \right| \leq \left| \frac{j_0(k,N)}{N} \right| \circ \left| \frac{1}{j_0(k,N)} \sum_{j_0(k,N)}^{i} \phi(x_i) - \int_X \phi d\nu \right| +$$

$$+ \left| \frac{j_0(k,N)}{N} - \alpha_0 \right| \circ \left| \int_X \phi d\nu \right| + \sum_{n=1}^{n_0} \left| \frac{j_n(k,N)}{N} - \alpha_n \right| \circ ||\phi|| +$$

$$+ \left| \frac{j(k,N)}{N} \right| . \|\phi\| + \left(\sum_{n>n_0} \alpha_n \right) . \|\phi\| \le \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon,$$

voor alle $N \ge N_0 = N_0(\varepsilon,\phi)$, uniform in k. Hiermee is het bewijs voltooid.

Literatuur

[1] P.C. BAAYEN and Z. HEDRLÍN, On the existence of well distributed sequences in compact spaces. Rapport ZW 1964-009, Math. Centrum, Amsterdam, 1964.

[2] A.F. DOWIDAR and G.M. PETERSEN, The distribution of sequences and summability. Canad. J. Math. 15 (1963), 1-10.

[3] B. ECKMANN, Über monothetische Gruppen. Commentarii Math. Helvet. 16 (1943/44), 249-263.

[4] G. HELMBERG und J. CIGLER, Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung. Jahresbericht d. D.M.V. 64 (1961), 1-50.

[5] G. HELMBERG and A.B. PAALMAN-DE MIRANDA, Almost no sequence is well distributed. Zal verschijnen in de Proc.Kon. Ned. Akad. v. Wetensch.

[6] E. HLAWKA, Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen. Rend. Circ. mat. Palermo 4 (1955), 33-47.

[7] E. HLAWKA, Folgen auf kompakten Räumen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 20 (1956), 223-241.

[8] F.R. KEOGH, B. LAWTON and G.M. PETERSEN, Well distributed sequences modulo 1. Canad. Journal of Math. 10 (1958), 572-576.

[9] G.M. PETERSEN, Almost convergence and uniformly distributed sequences. Quart. J. Math., Oxford, 2nd series, 7 (1956), 188-191.

[10] G.M. PETERSEN and M.T. McGREGOR, On the structure of well distributed sequences. Nieuw Archief v. Wisk. (3e serie) 11 (1963), 64-67.

[11] H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. 77 (1916), 313-352.

[12] Syllabus Colloquium gelijkverdeling, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1963/1964.