STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1966-012

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr. G.K.R.O.M. Braun

30 november 1966

Meten in de fysica wiskundig beschouwd

1.

In vele fysische theorieën treden algebraïsche structuren op. Deze lezing zal gewijd zijn aan het bepalen van dergelijke structuren (meetproces) en een onderzoek van het idealisatieproces dat van de waarnemingen naar de geïdealiseerde theorie leidt.
Hulpmiddelen van dit onderzoek zijn a) enkele eenvoudige structuurstellingen over partiëel geordende algebraïsche systemen en b) de theorie van projectieve limieten van verzamelingen en categorieën.

2.

Theorie van extensieve grootheden: kwantificatieprobleem;
standaardstructuren;
ijkprocedures;
meten door vergelijken.

3.

<u>Meten door vergelijken</u>; <u>formele theorie</u>.

Gegeven een algebraïsche structuur $(S, +, \leq)$ die voldoet aan de volgende axioma's: (I) $(a + b) + c = a + (b + c)$, (II) $a + b = b + a$, (III) $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$ alle c, (IV) $(a \leq a) \wedge ((a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow (a \leq c))$, (V) $(a \leq b) \wedge (a \leq c) \Rightarrow (b \leq c) \vee (c \leq b)$, (VI) $(a \underset{\sim}{<} b) \Rightarrow (a \leq b)$.

Daarbij is de <u>asymptotosche ordening</u> $\underset{\sim}{<}$ als volgt gedefiniëerd:

$$a \underset{\sim}{<} b = (\exists x, y)(\forall \varepsilon > 0)(\exists p, q \in \mathbb{N}, > 0)\left(\frac{q}{p} \leq \varepsilon \text{ en } pa + qx \leq pb + qy\right).$$

Dan geldt: 1) Er bestaat een additieve monotone afb. $f : S \to \mathbb{R}$,

2) Stel f, f' voldoen aan 1), dan is $f'(a) - f'(b) = C(f(g) - f(b))$ voor een $C > 0$ vast en voor alle a, b met $a \leq b$.

3) Neem aan dat bovendien

(VII) $(\exists 0 \in S)(a + 0 = 0 + a = a \text{ alle } a)$

geldt en $f(0) = 0$ wordt geeist. Dan is f op een positieve (ijk)factor na eenduidig bepaald.

4.

<u>Voorbeelden</u>:

1. Fysische meetkunde, lengtemeting 1-dimensionaal,
2. Fysische meetkunde, lengtemeting meer dimensionaal,
3. Chronometrie, tijdmeting,
4. Thermodynamica, entropie,
5. Mechanica, trage massa, zware massa, energie.

5.

<u>Probleem van benaderingsstructuren</u>:

<u>reale structuur</u> (in een gegeven waarneminssituatie),

<u>ideale structuur</u>,

Verband tussen reale structuur en ideale structuur: De ideale structuur is een projectieve limiet van reale structuren, het onderliggende projectieve systeem is bepaald door de fenomenen en de nauwkeurigheid van de waarneming: <u>Microscoop experiment</u>.

6.

Formele theorie van projectieve limieten:

Definitie: Gegeven α) een verzameling $I \neq \phi$, een pre-ordening(of partiële ordening of G-ordening $\leq$) op I, β) Voor $i \neq \phi$ een verzameling $X_i \neq \phi$ en γ) voor $i, j \in I$, $i \leq j$, een afbeelding $f_{ij} : X_j \to X_i$ zodat de f_{ij} consistent zijn met $\leq$, d.w.z. γ_1) $\begin{matrix} i \leq j \\ j \leq k \end{matrix} \Rightarrow f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ en

γ_2) f_{ii} identiteit op X_i.

Dan noemt men $\Pi = \{X_i, f_{ij}\}$ een projectief systeem voor I en $X = \varprojlim X_i$ is de projectieve limiet van Π. Daarbij is

$$X = \left\{x \in \prod_{k \in I} X_k \middle| \; i \leq j \Rightarrow x_i = f_{ij}\, x_j \text{ voor } \begin{matrix} x_i = p_i x \\ x_j = p_j x \end{matrix} \right\}.$$

$p_i = \prod_{k \in I} X_k \to X_i$ is de kanonieke projectie, $f_i \underset{D}{\equiv} p_i | X$. Dan geldt

$i \leq j \Rightarrow f_i = f_{ij}\, f_j$ voor $i \leq j$.

7.

Voorbeelden:

afrondingsprocedure voor reële getallen,

invoering van begrip stoffelijk punt door idealisatie,

lengtemeting 1-dimensionaal of meerdimensionaal.

8.

Definitie:

Gegeven a) een projectief systeem $\Pi = \{X_i, f_{ij}\}$, $X = \varprojlim X_i \neq \phi$,

b) een systeem van n-aire relaties R_i op X_i, dus $R_i \subset X_i^n$.

We noemen het systeem $\{R_i | i \in I\}$ consistent met Π als a), convergent, limiet $R \underset{D}{\equiv} \varprojlim R_i$ als a) en b).

Daarbij betekenen a) $i \leq j \Rightarrow f_{ig}^{\;n} R_j \subset R_i$,

b) $R = \varprojlim R_i \neq \phi$.

9.

Voorbeelden:

$n = 1$ convergentie naar één element,

n = 2 onnauwkeurigheidsrelaties,
binaire verzamelingswaardige operaties,
" " " " , asymptotisch associatief,
" " " " , " commutatief,
compatibiliteit van relaties met operaties,
compatibiliteit van operaties met relaties.

10.
Toepassing op de lengtemeting.

11.
Generalisatie van probleem, formulering in termen van categorieën en projectieve limieten van categorieën.