7122

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1965-122

De continuum-hypothese:

Een onoplosbaar probleem

P.C. BAAYEN

Reprinted from
'Geloof en Wetenschap'

OVERDRUK UIT

GELOOF EN WETENSCHAP

ORGAAN VAN DE CHRISTELIJKE VERENIGING
VAN NATUUR- EN GENEESKUNDIGEN
IN NEDERLAND

JAARGANG . . . .

AFLEVERING . . . .

DRUK: KLEIJWEGT - LOOSDUINEN

DE CONTINUUM-HYPOTHESE: EEN ONOPLOSBAAR PROBLEEM

door

P. C. BAAYEN

Opgedragen aan de nagedachtenis van Prof. Dr. J. F. Koksma.

Onder hen, die aan de Vrije Universiteit wiskunde of natuurkunde studeerden, zullen er niet velen zijn die niet werden ingeleid in de verzamelingenleer door de sprankelende en meeslepende colleges van professor Koksma.

De verzamelingenleer bleek, na een stormachtige evolutie in de laatste decennia van de 19e eeuw, aanleiding tot belangrijke veranderingen in de wiskunde. Niet alleen stimuleerden zijn paradoxen tot diepgaand grondslagenonderzoek, leidende tot een veelzijdige wijsbegeerte der mathesis; zijn methoden voerden er ook uiteindelijk toe, dat in vele onderdelen der wiskunde koers werd gezet in meer abstracte richtingen. Doorgaans brachten deze koerswijzigingen rijke winsten in.

Professor Koksma, die als eerste (en vele jaren als enige) wiskunde doceerde aan de Vrije Universiteit, heeft altijd het grote belang van de verzamelingenleer onderkend, en naast zijn vele andere wiskundige bezigheden heeft hij met grote belangstelling de verdere ontwikkeling ervan gevolgd. En in zijn vijfendertigjarige ambtsperiode heeft hij de aankomende mathematici en physici regelmatig in staat gesteld van zijn kennis in dezen de vruchten te plukken. Zij die bij hem het college verzamelingenleer volgden zullen niet licht zijn enthousiasme vergeten, en zijn fonkelende betoogtrant; maar vermoedelijk zullen slechts weinigen zich gerealiseerd hebben hoe zorgvuldig de presentatie was overwogen en voorbereid, aangepast aan het gehoor van merendeels jongerejaars studenten, en hoeveel originaliteit verborgen ging in de vaak geheel omgewerkte en vernieuwde bewijzen!

Het was ook professor Koksma die voorstelde een zeer actueel onderwerp uit de verzamelingenleer — de kortelings door P. J. Cohen bewezen onafhankelijkheid van de continuum-hypothese — te kiezen voor het wiskunde-college dat als één van de vele college's voor afgestudeerden op de eerste Academiedag van de Vrije Universiteit, 3 oktober 1964, werd gegeven. Van dit college is onderstaande verhandeling een (enigszins verkorte en ten dele voor een wijder publiek omgewerkte) weergave.

Inmiddels is op 17 december 1964, zeer onverwachts, professor Koksma van ons heengegaan. Dit is niet de plaats om er nader en in den brede op in te gaan hoe groot het verlies is dat wij hierdoor leden; zij het mij echter vergund hier de gevoelens van vele van zijn studenten en oud-studenten te vertolken door mijn grote dank en erkentelijkheid uit te spreken aan God voor de bezielende en toegewijde leermeester die Hij ons in professor Koksma geschonken heeft.

In zijn rectorale oratie „Discreet of continu", uitgesproken in 1953 [1]), wees professor Koksma mede op de contrasten tussen enerzijds het geheel der natuurlijke getallen 1, 2, 3, . . . en anderzijds de collectie der dusgenaamde reëele getallen.
De natuurlijke getallen – nauw verbonden met eindige hoeveelheden, eindige aantallen – vullen tezamen een oneindige collectie. Géén is de grootste onder hen. Deze oneindige familie is *discreet:* de natuurlijke getallen distanciëren zich van elkander, en zelfs naaste buren bewaren onderling nog altijd een afstand 1.

Hoe verschillend liggen de verhoudingen in de familie der reëele getallen! De wiskundigen weten deze getallen op velerlei wijze te beschrijven, doch zien veelal af van een diep gravende discussie van hun aard en karakter. In plaats daarvan volstaan zij met het verschaffen van een signalement, een opsomming van grondtrekken die juist uitvoerig genoeg is om in de dagelijkse omgang met deze reëele getallen te kunnen werken. Laten wij in nog minder berusten, en ons tevreden stellen met een model voor slechts één hunner qualiteiten: hun rangschikking naar grootte. Indien men zich voorziet van een in twee richtingen zich eindeloos voortzettende rechte lijn, waarop een vast punt 0 (de oorsprong) gemarkeerd is, en daarnaast van een lengte-eenheid, een standaard-maat voor de lengtemeting, dan kan men aan ieder punt van die rechte een reëel getal toevoegen, de lengte namelijk (gemeten met de standaard-maat) van het lijnsegment dat het bewuste punt met 0 verbindt. Onderscheidt men bovendien tussen een positieve en een negatieve richting op de lijn, zodat er segmenten zowel van positieve als van negatieve lengten zijn, dan blijkt ieder reëel getal afzonderlijk onderdak te vinden. Doch welk een gedrang, welk een opeenhoping! Op deze *getallenrechte* is geen sprake meer van een discrete verdeling, van ruimte en distantie tussen naaste buren. Ja, de indiscretie gaat zelfs zo ver dat van naaste buren niet eens meer sprake is: tussen elk tweetal onderling verschillende punten van de lijn bevindt zich een *continuum* van andere punten. [2])

Getallenrij en getallenrechte: twee oneindige verzamelingen die beide een fundamentele rol spelen in het drama der wiskunde. Zo verscheiden, en toch zo verbonden: immers, als we de reële getallen zien als de punten van een weg zonder begin of einddoel, dan zijn de natuurlijke getallen de mijlpalen die op vaste afstanden in de berm staan. In wiskundig jargon: de verzamelingen der natuurlijke getallen kan men als deelverzameling inbedden in de collectie der reële getallen. De natuurlijke getallen wonen in op de getallenrechte. Maar is het niet zonder meer duidelijk dat zij naast de hoofdbewoners — de onnatuurlijke reële getallen — ondanks hun oneindigheid in menigte slechts onbeduidend in aantal zijn? Is het niet duidelijk dat de oneindigheid van de getallenrechte van groter orde is dan die van de getallenrij?

De laatst gestelde vragen smeken om precisering. Is het inderdaad mogelijk verschillende ordes van oneindigheid te onderscheiden? Kan men oneindige verzamelingen naar aantal onderscheiden?

Het is de Duitse wiskundige G. Cantor geweest die als eerste op strenge en tevens overtuigende wijze inhoud gaf aan het begrip „even groot" voor oneindige verzamelingen. Inmiddels is zijn definitie gemeen goed geworden; er wordt over geschreven in zogenaamde „populair-wetenschappelijke" boeken over wiskunde, en hij is zelfs doorgedrongen in collecties van mathematische puzzles en spelen. [3]) Het valt ons heden moeilijk om nog ten volle ons de grote originaliteit van Cantor's werk te realiseren.

In de jaren na 1873 bouwde Cantor een geheel nieuwe en voor die dagen zeer revolutionaire theorie op: de Verzamelingenleer. [4]) Werkend met willekeurige collecties (dus niet slechts met stelsels getallen, of puntenverzamelingen in de euklidische ruimte, zoals krommen en oppervlakken) onderzocht hij systematisch de mogelijkheden om uit gegeven verzamelingen nieuwe te construeren, en om steeds grotere verzamelingen op te bouwen. Daarbij kwam hij er ook toe, zoals reeds gezegd, om oneindige verzamelingen naar grootte te vergelijken.

Cantor sprak af dat twee verzamelingen X en Y *gelijkmachtig* zullen heten (lees: dat X en Y zullen worden beschouwd als even grote verzamelingen, met evenveel elementen) indien er een ondubbelzinnig omkeerbare toevoeging bestaat tussen X en Y. In andere woorden: X en Y zijn gelijkmachtig indien er een afbeelding f bestaat van X op Y met de beide navolgende eigenschappen: (1) indien x_1 en x_2 twee verschillende objecten zijn, behorende tot de verzameling X, dan zijn hun beelden $f(x_1)$ en $f(x_2)$ verschillende objecten uit Y; en (2) ieder object y, behorende tot Y, is beeld f(x) van object x uit X.

In deze zin zijn bijvoorbeeld de *even* en de *oneven* natuurlijke gelen gelijk in aantal.

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & . & . & . & . & 2n\text{-}1 & . & . & . \\
f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & \downarrow & & & \\
 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & . & . & . & . & 2n & . & . & .
\end{array}$$

Een volkomen acceptabel resultaat! Veel verrassender, en bij eerste kennismaking nogal verontrustend, is het feit dat de verzameling der even natuurlijke getallen ook gelijkmachtig is met de verzameling van *alle* natuurlijke getallen:: men beschouwe slechts de hieronder geschetste toevoeging:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . & . & . & . & n & . & . & . \\
f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & \downarrow & & & \\
 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & . & . & . & . & 2n & . & . & .
\end{array}$$

Dit exotische verschijnsel — dat een verzameling X (in casu de natuurlijke getallen) gelijkmachtig is met één van zijn echte deelverzamelingen (in casu de collectie der even natuurlijke getallen) — blijkt zich voor te doen telkenmale wanneer X niet eindig is. Men went er op den duur wel aan. Veel verontrustender is het dat de gelijkmachtigheids-eigenschap geen respect blijkt te hebben voor het discrete karakter van de getallenrij: ook de verzameling van alle rationale getallen (de getallen die zich laten voorstellen als breuken p/q) blijkt met de verzameling der natuurlijke getallen gelijkmachtig. [5])

Dit laatste resultaat is zeer wel geschikt om ons vertrouwen in Cantor's gelijkmachtigheidsbegrip te ondermijnen. Is dit begrip wel zinvol? Of zou het soms blijken, achteraf, dat alle oneindige verzamelingen gelijkmachtig zijn, zodat slechts in schijn het oneindige nader geanalyseerd wordt?

Des te meer indruk maakt het op ons wanneer wij bij Cantor een bewijs aantreffen van de uitspraak: *de getallenrij en de getallenrechte zijn niet gelijkmachtig.* Anders gezegd: het is niet mogelijk de reële getallen te tellen. Onmiddellijk gevolg: er zijn inderdaad verschillende „ordes van oneindigheid"!

In de verzamelingenleer voert men oneindige cardinaalgetallen in, oneindige aantallen. Uiteraard gebeurt zulks op zodanige wijze dat twee verzamelingen hetzelfde cardinaalgetal toegekend krijgen indien zij gelijkmachtig zijn, en ook alléén in dat geval. Het cardinaalgetal, toegevoegd aan de getallenrij (en aan alle verzamelingen, gelijkmachtig met de rij der natuurlijke getallen) zullen we in het verdere van dit betoog weergeven met A; voor het cardinaal getal van de getallenrechte schrijven we C. Bovenvermelde stelling van Cantor kan dan worden geformuleerd in de vorm: „$A \neq C$". Wanneer men nog een grootte-ordening voor cardinaalgetallen invoert (zulks kan op zeer natuurlijke wijze geschieden [6])), kan men zelfs schrijven: „$A < C$".

Cantor nu stuitte bij zijn onderzoekingen op de volgende vraag: zijn er nog cardinaalgetallen tussen A en C? Of, in een formulering die vrij is van cardinaalgetallen:

„Is er een oneindige verzameling van reële getallen die noch met de rij der natuurlijke getallen, noch met het continuum van alle reële getallen gelijkmachtig is.".

Dit probleem, beroemd als het *continuum-probleem,* wist Cantor niet op te lossen. Hij vermoedde dat het antwoord ontkennend moest luiden (de vermaarde *continuum-hypothese).* Deze hypothese van Cantor is nog immer niet weerlegd of bewezen, en tot voor kort scheen een definitieve afsluiting van het continuum-probleem nog ver en onbereikbaar. Zeer recente resultaten uit het terrein van het grondslagenonderzoek hebben echter een uitermate verrassend licht geworpen op dit continuum-vraagstuk: weliswaar is Cantor's hypothese nog immer onbewezen en onweerlegd, maar desondanks is de zaak rond, het dossier kan worden gesloten, het onderzoek gestaakt. Te verklaren waarom en in welke zin dit het geval is, is het hoofddoel van ons betoog. Maar deze verklaring zal ons pas mogelijk zijn nadat wij ons hebben verdiept in de huidige status van de verzamelingenleer.

Wij noemden reeds het werk van Cantor in de laatste decennia van de vorige eeuw, waaruit de verzamelingenleer werd geboren.

Deze jongste telg uit het geslacht Mathesis werd aanvankelijk met veel kritiek en weinig enthousiasme ontvangen. Maar geleidelijk groeide het aantal vrienden en bewonderaars, en allengs kwam het zover dat de verzamelingenleer door sommige uitgeroepen werd tot wonderkind!

Toen, in 1897, gebeurde er iets waardoor niet alleen de verzamelingenleer, maar zelfs de gehele mathesis in opspraak kwam. Uitgaande van Cantor's resultaten leidde de Italiaanse wiskundige C. Burali Forti op wiskundig strenge wijze een innerlijke tegenspraak af . . . .

Burali Forti's paradox – zo noemt men tegenwoordig zijn resultaat – is te gecompliceerd om in het kader van dit betoog uiteengezet te worden. Later werden andere innerlijke tegenstrijdigheden ontdekt. Vooral de zogenaamde *paradox van B. Russell* verwierf grote bekendheid. Van deze paradox werden verschillende gepopulariseerde versies voor niet-wiskundige afnemers op de markt gebracht; de bekendste betreft het dilemma van de regimentskapper die strenge orders kreeg om alle leden van het regiment te scheren die zulks niet zelf deden, en niemand anders, en die er toen niet meer uitkwam of hij zichzelf nu moest scheren of niet.

Het is met die paradoxen een ernstige zaak; immers, juist het gewisse der wiskunde wordt door hen op losse schroeven gezet! Het zou zeer de moeite waard zijn de verschillende reacties op hun ontdekking te schilderen, de snelle ontwikkeling van de wijsbegeerte en het grondslagen-onderzoek der wiskunde, het ontstaan van een aantal tegenover elkaar staande scholen, inuïtionisten en formalisten, finitisten en axiomatici.

Maar neen, het zou ons al te ver meeslepen, weg van ons eigenlijke onderwerp vandaan; en men kan het verhaal elders vinden [7]).

Laten wij er mee volstaan op te merken dat sommigen wilden concluderen dat de fout gezocht moet worden in het werken met het oneindige, althans met het actuele oneindige; zij verwierpen grotendeels de oorspronkelijke theorieën van Cantor; zij verwierpen met name het klassieke continuum der reële getallen. Tegenover hen echter schaarden zich zij, die meenden – met de woorden die J. A. Barrau ze in de mond legt [8]) – dat „de verdwijning der paradoxen, die pijnlijke splinters in de vingertop, met de amputatie van een gehele arm te duur werd betaald". Deze tweede groep is heden verreweg in de meerderheid. Laten wij ons voor vandaag onder hen scharen; deden wij zulks niet namelijk, dan zouden wij nu en hier afscheid moeten nemen van elkaar en van het continuum-probleem; immers dit probleem, het onderwerp dat ons samenbracht, zouden wij als leeg en zinloos, een louter woordenspel moeten verwerpen.

Maar ja, op de onbezorgde wijze van Cantor kunnen we toch niet verder gaan. De benaming „paradox" voor de contradicties die in de verzamelingenleer ontdekt werden suggereert ons wel deze tegenspraken niet *te* serieus te nemen, desondanks *blijven* tegenspraken binnen de wiskunde onaanvaardbaar.

Een analyse van de paradoxen doet het vermoeden opkomen dat hun ontstaan wellicht daaraan te wijten is dat sommige collecties te groot worden om nog als verzameling te worden erkend. Om nog eens de woorden van Barrau te gebruiken, het schijnt dat een te *ongebreideld* verzamelen tot hinderlijke paradoxen voert [9]).

De remedie heeft men gezocht in een axiomatiseren van de verzamelingenleer. Als we nu om te beginnen slechts een paar „veilige" verzamelingen toelieten tot onze theorie, en daarnaast dan slechts een beperkt aantal methoden aanvaardden om uit reeds acceptabel geachte verzamelingen nieuwe op te bouwen, zouden we er dan misschien niet in slagen om een theorie op te bouwen, waarin de paradoxen niet gereconstrueerd kunnen worden, terwijl toch het grootste gedeelte van Cantor's resultaten gered en geborgen worden kan?

In de loop der jaren zijn verschillende axiomastelsels voor de verzamelingenleer ontworpen en bestudeerd. De meest bekende hiervan zijn het stelsel, ontwikkeld door E. Zermelo en verder uitgewerkt en gestroomlijnd door A. Fraenkel en T. Skolem, en het axiomatische systeem dat werd opgebouwd door J. von Neumann, P. Bernays en K. Gödel. Hoewel verschillend van opzet en methode zijn deze beide axiomatische theorieën toch tot op zekere hoogte gelijkwaardig [10]); bij de tegenwoordige opbouw van de verzamelingenleer, en bij nieuwe onderzoekingen en verdere uitbouw, kiest men meestal één van deze beide axiomastelsels (of de een of andere nauwverwante variant) tot uitgangspunt. [11])

Daarbij is het zó dat inderdaad de oorspronkelijke verzamelingenleer van Cantor voor het grootste gedeelte opnieuw opgebouwd kan worden, opnieuw *is* opgebouwd, op de nieuwe fundamenten. En ditmaal is men niet op paradoxen gestoten die het bouwwerk deden scheuren; de fundamenten zijn nog niet verzakt. Uiteraard *hopen* we ook dat zij niet verzakken *zullen*, dat we niet meer met paradoxen geconfronteerd zullen worden; nog weer anders gezegd, nu meer vaktechnisch: dat onze nieuwe, axiomatische theorie *consistent* zal blijken; maar – zekerheid hieromtrent hebben we niet. Tot zo'n vijfendertig jaar geleden was men wat dat betreft overigens heel optimistisch; men hoopte dat een bewijs gevonden zou worden dat die axiomatische verzamelingenleer vrij is van innerlijke tegenspraken.

In 1931 echter is die hoop de bodem ingeslagen. In dat jaar wist K. Gödel namelijk streng en onweerlegbaar aan te tonen dat zo'n bewijs (van het vrij zijn van tegenspraken der axiomatische verzamelingenleer) *nooit* gevonden zal worden: indien een theorie van het kaliber van de verzamelingenleer consistent is, dan is die consistentie onbewijsbaar! [12])

Sinds 1931 is derhalve de situatie aldus: we hebben een theorie, rijk aan wiskundige inhoud en bruikbaarheid. Binnen deze theorie zijn we nog nooit op een paradox gestoten. Maar we hebben geen zekerheid dat zulks nooit geschieden zal, en zullen die zekerheid nooit kunnen verwerven, zullen het zonder die zekerheid moeten. stellen. We varen over een zee die blauw en glad zich uitstrekt zo ver ons oog reikt, maar weten niet of ergens dicht onder het wateroppervlak verraderlijk een rif ons wacht. Dat zullen we pas weten als we op zo'n klip gestrand zijn. Desondanks varen we voort, want het alternatief – stil en roerloos te blijven liggen, vaart en vooruitgang stil te leggen – is immers onaanvaardbaar!

Inmiddels wordt het tijd dat we ons weer wenden tot ons oorspronkelijke onderwerp. Inmiddels ook is het ons mogelijk geworden de recente resultaten betreffende deze hypothese, waarop reeds enige malen werd gezinspeeld, te vermelden en toe te lichten.

Eerst echter moet een resultaat genoemd worden dat al vijfentwintig jaar oud is. In 1938 publiceerde Gödel een geniaal bewijs van de *relatieve consistentie* van de continuum-hypothese (en zelfs van een zeer veel sterkere aanname). [13]). Hij toonde nl. het volgende aan: indien de verzamelingenleer, geaxiomatiseerd volgens Zermelo-Fraenkel of volgens Von Neumann-Bernays-Gödel, vrij is van tegenspraken, dan zal hij vrij van tegenspraken blijven indien de continuum-hypothese als axioma wordt toegevoegd. Door de continuum-hypothese als waar te aanvaarden zal men geen paradoxen introduceren.

Maar dit houdt nog niet in dat de continuum-hypothese inderdaad een *ware* uitspraak is. Of veel zwakker en toegankelijker (want waar moeten wij beginnen als wij vaststellen willen dat een wiskundige uitspraak inderdaad en ten volle *waar* is): Gödel's stelling impliceert nog niet dat de continuum-hypothese uit de verdere theorie bewezen kan worden. Het ware nog denkbaar — ofschoon nauwelijks voorstelbaar — dat ook de ontkenning van de continuum-hypothese (de aanname dus, dat er een oneindige verzameling van reële getallen bestaat die noch met de collectie der natuurlijke getallen, noch met die van alle reële getallen gelijkmachtig is) niet strijdig blijkt met de verdere theorie. Zulks zou inhouden, in de hiervoor gebruikelijke terminologie, dat de continuum-hypothese *onafhankelijk* is van de verdere axioma's.

Zou het continuum-vermoeden onafhankelijk zijn, zo vragen we ons dus af. Indien zulks het geval zou zijn, dan zou dat betekenen dat het continuum-probleem binnen de huidige theorieën onbeslisbaar is: de continuum-hypothese was dan onweerlegbaar (immers hij leidt niet tot contradicties) maar ook onbewijsbaar (want anders was zijn ontkenning tòch contradictoir). Hoewel in eerste instantie deze situatie hoogst onwaarschijnlijk lijkt ging men de mogelijkheid ervan geleiderlijkerwijs steeds meer onder ogen zien. In zijn reeds genoemde oratie „Discreet of Continu" zei professor Koksma [14]):

„Ik wijs echter op een buitengewoon belangwekkend vermoeden, waartoe men op grond van de tot dusverre bereikte resultaten gekomen is, namelijk het vermoeden, dat de gangbare axiomenstelsels, waarmede men de theorie der puntverzamelingen beschrijft, niet toereikend zijn om het continuumprobleem te beslissen. Men zou dan in dezelfde situatie verkeren, als in de meetkunde van Euclides, waarin bepaalde stellingen niet kunnen worden bewezen of weerlegd, zonder aan de postulaten van Euclides ook zijn beroemde vijfde postulaat, het parallelenaxioma, toe te voegen".

Inmiddels is dit vermoeden realiteit gebleken. In december 1963 en januari 1964 verscheen een tweetal artikelen van de hand van de Amerikaan P. J. Cohen, getiteld „The independence of the continuum hypothesis" [15]). In deze artikelen schetst Cohen een bewijs van het volgende: indien de axiomatische verzamelingenleer (opgebouwd, zeg, met behulp van het axiomastelsel van Zermelo en Fraenkel), consistent is, vrij van tegenspraak, dan blijft de theorie consistent indien als extra axioma wordt toegevoegd de uitspraak: „Er bestaat een oneindige verzameling reële getallen die niet gelijkmachtig is met de rij der natuurlijke getallen en evenmin met de rechte van alle reële getallen" (Behalve deze algemene ontkenning van Cantor's hypothese beschouwde Cohen nog vele meer specifieke uitspraken die ontkenningen van deze hypothese vormen, en bewees hun relatieve consistentie [16])).

In conjunctie met Gödel's stelling uit 1940 betreffende de relatieve consistentie van de continuum-hypothese is hiermede inderdaad de onafhankelijkheid van Cantor's vermoeden aangetoond. Het continuum-probleem is onoplosbaar gebleken.

Ook van een aantal andere openstaande problemen is door Cohen en door anderen die zijn methoden gebruikten de status opgehelderd. Zo bleek o.a. ook het keuze-axioma van Zermelo, dat in de moderne wiskunde een hoogst belangrijke rol speelt [17]) onafhankelijk te zijn.

Deze recente resultaten dringen ons tot een hernieuwde bezinning betreffende de grondslagen der wiskunde. Welke werkelijkheid beschrijft de wiskunde? Wanneer is een wiskundige uitspraak *waar*? Moeten we, waar het de continuum-hypothese betreft, ons scharen achter het platonische standpunt, ponerend dat wij deze hypothese weliswaar kunnen weerleggen noch bewijzen, maar dat desondanks slechts één van beide, òf de hypothese zelf òf zijn ontkenning, met de „werkelijkheid" overeenstemt? Of mogen wij meegaan met de formalisten, die stellen dat de onafhankelijkheid van Cantor's vermoeden onze mogelijkheden verrijkt door ons in het bezit te stellen van meerdere theorieën, elk (hopelijk) gaaf en consistent, hoewel onderling tegenstrijdig; al naar gelang van omstandigheden of voorkeur zouden wij dan nu eens de éne theorie, dan weer de andere kunnen gebruiken. Of behoren wij met meer aandacht te luisteren naar de nominalisten, die heel die abstracte theorie der oneindigheden zinledig achten, of naar de intuïtionisten die ook (zij het op andere gronden) het continuum-probleem, zoals wij het formuleerden, een welbepaalde inhoud ontzeggen? [18]).

In diepste grond zijn dit vragen naar de plaats van de wiskunde en het wiskundig bezig zijn binnen het geheel van God's Schepping. De bedoeling van dit betoog, was, deze vragen naar voren te brengen, niet ze te beantwoorden.

AANTEKENINGEN

[1]) Drukkerij Kleijwegt, Loosduinen, 1953. Gepubliceerd in Geloof en Wetenschap 1956, blz. 231.

[2]) Zie hiervoor nader de reeds genoemde oratie van J. F. Koksma; voorts: P. Mullender, Meten en Maat (Geloof en Wetenschap 1962, blz. 263).

[3]) Zie bijv. G. Gamow, One, two, three . . . infinity (New York, 1948); D. Pedoe, The Gentle Art of Mathematics (Penguin Books, 1963).

[4]) Een uitvoerige inleiding in de verzamelingenleer vindt men in A. A. Fraenkel, Abstract Set Theory (Amsterdam, 1953). Twee belangrijke artikelen van G. Cantor zijn (in Engelse vertaling) uitgegeven als een Dover-book: Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers (New York, z.j.). Veel historisch materiaal is ook te vinden in A. Schoenflies, Entwicklung der Mengenlehre und ihre Anwendungen (Leipzig, 1913).

[5]) Zie Fraenkel l.c., of ook de onder [3]) genoemde boeken van Gamow en Pedoe.

[6]) Het cardinaalgetal (ook wel genoemd de machtigheid) van een verzameling X heet *groter* dan het cardinaalgetal van Y indien, ten eerste, X en Y niet gelijkmachtig zijn, en voorts, ten tweede, een deelverzameling X_0 van X gelijkmachtig is met Y.

[7]) Voor een uitvoerige discussie zie A. A. Fraenkel en Y. Bar-Hillel, Foundations of set theory (Amsterdam, 1958). Zie ook: L. Henkin, Are Logic and Mathematics identical? (Science *138*, 788-794).

[8]) J. A. Barrau, De onbemindheid der Wiskunde; rectorale oratie (Groningen 1926).

[9]) L.c. pagina 14.

[10]) Met behulp van één dezer theorieën kan een model worden opgebouwd van de andere; als de ene theorie consistent is (vrij van innerlijke tegenspraken), dan dus ook de andere. Zie o.a. Fraenkel en Bar-Hillel, l.c. pag. 122 e.v.

[11]) Een sterk afwijkend stelsel is ontworpen door W. V. O. Quine, Mathematical Logic (Cambridge, Mass., 1958); zie ook van dezelfde auteur: Set theory and its logic (Cambridge, Mass., 1963).

[12]) K. Gödel, Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I (Monatshefte für Mathematik und Physik *38*, 173--198).

[13]) K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis (Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *24* (1938), 556-557). Een uitgewerkte versie verscheen in boekvorm: K Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory (Princeton, N.J., 1940).

[14]) L.c. pag. 15. Zie ook: K. Gödel, What is Cantor's Continuum problem? P. Benacerraf en H. Putnam, Philosophy of Mathematics (Englewood Cliffs, N.J., 1964), pp. 258-273.

[15]) P. J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis, Part I (Proc. Nat. Acad. Sci. *50* (1963), 1143-1148); Part II (ibid. *51* (1964), 105-110). Het door Cohen geschetste bewijs is semantisch van opzet. Een volledig uitgewerkt syntactisch bewijs (berustend op de methoden van Cohen) werd gepubliceerd door P. Vopenka, Nezavisimost' Kontinuum-gipotezy (Comm. Mat. Univ. Carolinae, Supplementum I, 1964).

[16]) De continuum-hypothese luidt: er is geen cardinaalgetal tussen A en C. Cohen bewees dat de uitspraken

(1) er is precies één cardinaalgetal tussen A en C;
(2) er zijn precies twee cardinaalgetallen tussen A en C;
.
.
.
(n) er zijn precies n cardinaalgetallen tussen A en C;
.
.
.

elk afzonderlijk relatief consistent zijn ten opzichte van het verdere axiomastelsel. Elk dezer uitspraken is een ontkenning van Cantor's hypothese (onderling zijn ze uiteraard contradictoir). Cohen bewees ook dat men zelfs mag aannemen dat er oneindig veel cardinaalgetallen liggen tussen A en C zonder paradoxen in het systeem te introduceren. Vgl. A. Mostowski, Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese (Elemente der Mathematik *19* (1964), 121-125).

[17]) Vgl. P. C. Baayen, Het keuze-axioma: zijn plaats en functie in de wiskunde (Rapport ZW 1962-023, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1962).

[18]) Zie G. D. W. Berry en J. R. Myhill, On the ontological significance of the Löwenheim-Skolem Theorem (Symposium *Academic Freedom, Logic, and Religion*, Philadelphia 1953, 39-55 en 57-70). Vgl. voorts Barrau, l.c.; Fraenkel en Bar-Hillel, l.c.; ook: J. Wolff, Over het subjectieve in de wiskunde; inaugurele oratie Utrecht (Groningen, 1922).

SUMMARY

The continuum hypothesis of G. Cantor asserts that there exists no set of real numbers which is non-denumerable and yet has a power strictly less than the power of the set of all reals. Recently it was shown that this hypothesis is independent from the usual axioms of set theory (P. J. Cohen 1963). The significance of this important result is explained and discussed in an informal way.