hoger Standpunt,

Syllabus voordracht 13 October 1948.

Rapport ZW1948-013

OPPERVLAKTE EN INHOUD.

door Prof. Dr. B.L.v.d.Waerden.

I. MODERNE DEFINITIES.

1. Oppervlak van een vlakke figuur F volgens Riemann-Jordan:
   Overdek F met een net van rechthoeken.
   Definieer: Opp. rechthoek = Basis × Hoogte
   Binnensom Bi = som opp. rechthoeken binnen F
   Buitensom Bu = som opp. rechthoeken die F overdekken
   F heet meetbaar, als $|Bu - Bi| < \varepsilon$
   Oppervlakte = bovengrens der binnensommen.
2. Inhoud van een lichaam net zo
3. Booglengte = bovengrens lengte ingeschreven veelhoeken
4. Gebogen oppervlakte = limiet opp. ingeschreven polyeders, mits de zijvlakken naderen tot raakvlakken.

II. KAN HET NIET EENVOUDIGER?

Axioma's van Euclides

1. Dingen, gelijk aan hetzelfde, zijn gelijk aan elkaar.
2. Als men bij gelijke dingen gelijke voegt, zijn totalen gelijk
3. Als men van gelijke dingen gelijke afneemt, " resten "
4. Dingen, die op elkaar passen, zijn gelijk.
5. En het geheel is groter dan het deel

Op grond van deze axioma's bewijst Euclides:

A. Parallelogrammen op gelijke basis met gelijke hoogte zijn gelijk (dus elk parallelogram gelijk aan een rechthoek).

B. Een driehoek is gelijk aan een parallelogram op dezelfde basis met de halve hoogte (dus ook gelijk aan een rechthoek)

C. Rechthoek ad = rechthoek bc, als a : b = c : d (dus elke rechthoek gelijk aan rechthoek met basis 1). Daar nu elke veelhoek in driehoeken verdeeld kan worden, waarvan elk gelijk is aan een rechthoek met basis 1, is elke veelhoek gelijk aan een rechthoek met basis 1. Dit is alles wat men nodig heeft om veelhoeken A en B volgens hun oppervlak te vergelijken en uit te maken of A > B of A = B of B > A is. Om de bewijzen geheel streng te maken, moet men nog 2 axioma's erbij nemen:

6. A = B en A > B en B < A sluiten elkaar uit
7. Uit A = B en B > C volgt A > C.

Uitgaande van deze beschouwingen, definieert Hilbert de begrippen zerlegungsgleich en ergänzungsgleich.

Deze begrippen kunnen inderdaad als basis voor een theorie van de oppervlakten van vlakke veelhoeken dienen: Twee veelhoeken hebben gelijk opp., als ze ergänzungsgleich (of zerlegungsgleich) zijn.

2. Als twee krommen in één vlak dezelfde uiteinden hebben en naar dezelfde kant hol zijn, en als de eerste wordt omvat door de tweede en de verbindingslijn der uiteinden, dan is de eerste de kleinste.
3. en 4. analoog voor oppervlakken.
Met behulp van 1. en 2. bewijst nu Archimedes:
De cirkel is gelijk aan een driehoek welks basis gelijk is aan de omtrek en de hoogte gelijk aan de straal. Het boloppervlak is gelijk aan het oppervlak van een cirkel, die de middellijn van de bol tot straal heeft.
Bewijzen: Zie E.J. Dijksterhuis, Archimedes I.

Maar voor cirkels gaat 't niet meer: een maantje van Hippokrates is even groot als een gelijkbenige rechth. driehoek, maar niet zerlegungsgleich en ook niet ergänzungsgleich. Ook in de ruimte loopt 't mis: Twee pyramides met gelijke basis en hoogte zijn wel even groot, maar volgens Dehn niet ergänzungsgleich. Voor prisma's kan men hetzelfde doen als in het vlak, maar niet voor pyramides.

III. MAAR HOE DEDEN DE OUDE GRIEKEN HET DAN?

Axioma's bij Euclides geen definitie, maar bewijsmiddel. In de ruimte moet men er nog aan toevoegen:

8. Voor elk tweetal lichamen geldt $A = B$ of $A > B$ of $B > A$.

9. Als $A > B$, dan is er een C zo dat $A = B + C$.

10. Als $C < D$, dan is een veelvoud van C groter dan D.

Nu kan men bewijzen:

Twee tetraëders met gelijke basis en hoogte zijn gelijk

1. Hulpstelling (Eucl. X 1): Is $A > B$ en neemt men van A een stuk groter dan de helft weg, van de rest weer een stuk groter dan de helft, etc., dan zal de rest tenslotte kleiner worden dan B.

2. Elk tetraëder kan verdeeld worden in 2 prisma's en 2 tetraeders, en de 2 prisma's zijn groter dan de 2 tetraeders (Eucl. XII 3).

3. Neem twee tetraeders T en U op gelijke bases met gelijke hoogte.
Indien $T > U$, stel dan $T = U + V$
Verdeel T en U volgens 2) totdat rest $< V$:
$T = P + R$, $R < V$ en $U = Q + S$
Prisma's P = Prisma's Q
$T = P + R < Q + V < U + V = T$: Contradictie. Dus $T > U$ onmogelijk. Maar ook $U > T$ onmogelijk. Dus $T = U$.

4. Elk driezijdig prisma kan, gelijk bekend, verdeeld worden in 3 tetraëders met 2 aan 2 gelijke basis en hoogte.

Dus

A. Prisma = 3 x Tetraeder, of:
Tetraeder = Prisma op dezelfde basis met 1/3 van de hoogte.

Elk polyeder kan nu in pyramiden verdeeld worden, en van deze kan men allemaal weer blokken met basis 1 maken, deze op elkaar stapelen en zo de inhoud meten. Euclides bewijst met dezelfde methode:

B. Pyramiden met dezelfde hoogte verhouden zich als bases.

C. Cirkels verhouden zich als quadraten op stralen.

D. Bollen verhouden zich als kubussen op stralen.

Maar voor cirkelomtrek en bolopperlak zijn nieuwe axioma's nodig.

IV. OMTREK EN OPPERVLAK VOLGENS ARCHIMEDES

Archimedes definieert:

Een kromme is hol naar één kant, wanneer alle lijnstukken, die twee punten van de kromme verbinden, steeds aan dezelfde kant liggen.

Axioma's:

1. Van alle lijnen met dezelfde uiteinden is de rechte de kleinste.