STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950-013

Het radicaal van een ring

"Actualiteiten"

W. Peremans

1950

Voordracht door Dr W. Peremans in de serie
Actualiteiten op 30 September 1950

Het radicaal van een ring.

Voor een goed begrip van de te bespreken problemen is het noodzakelijk de geschiedenis ervan enigszins te kennen. Deze zullen wij daarom eerst in grote trekken schetsen.

Het onderwerp behoort tot de structuurtheorie van ringen. Deze is ontstaan uit de overeenkomstige theorie voor hypercomplexe systemen. Deze laatste is het eerst systematisch bestudeerd door Wedderburn[1], die voor hypercomplexe systemen een aantal zeer fraaie structuurstellingen bewees, die nu wel tot de klassieke bestanddelen van de wiskunde gerekend mogen worden. Hierin speelt het begrip nilpotent een belangrijke rol. Een element a van een ring heet <u>nilpotent</u>, als $a^n = 0$ voor een zeker natuurlijk getal n. Een links- of rechtsideaal L heet nilpotent als $L^n = 0$ voor een zeker natuurlijk getal n. (Het nulideaal geven wij met 0 aan. Er is geen verwarring te vrezen met het element 0). Voortaan zullen we onder een ideaal zonder nadere toevoeging een tweezijdig ideaal verstaan. Een rechtsideaal of linksideaal geven we kort aan met r-ideaal, resp. l-ideaal. Het spreekt vanzelf dat een stelling over l-idealen geldig blijft, als in praemissen en conclusie overal l-ideaal door r-ideaal vervangen wordt. In hypercomplexe systemen worden alleen zulke idealen beschouwd, die zelf hypercomplexe systemen zijn. Het is nu makkelijk te bewijzen, dat in een willekeurige ring ieder nilpotent l-ideaal bevat is in een nilpotent ideaal. In een hypercomplex systeem is de verzamelingstheoretische vereniging van alle nilpotente idealen (die dus ook alle nilpotente eenzijdige idealen omvat) zelf een nilpotent ideaal. Dit <u>grootste</u> nilpotente ideaal wordt het <u>radicaal</u> R van het hypercomplexe systeem A genoemd. De restklassenring A/R is een hypercomplex systeem waarvan het radicaal nul is. Een dergelijk systeem heet <u>halfenkelvoudig</u>. Hierdoor is het probleem van de structuurbepaling van hypercomplexe systemen teruggebracht tot die van nilpotente en van halfenkelvoudige systemen. (Dit is eigenlijk niet geheel juist, omdat, evenmin als de structuur van een groep bepaald is door die van een normale ondergroep en van de bijbehorende factorgroep, ook de structuur van een ring niet bepaald is door die van een ideaal en van de bijbehorende restklassenring. Op deze kwestie gaan we echter niet verder in).

De structuurtheorie van Wedderburn heeft het karakter van een definitieve theorie, die niet veel mogelijkheid tot verdere ontwikkeling meer biedt. In beweging kwam de zaak pas weer, toen in 1928 Artin [2], in overeenstemming met de in de twintiger jaren bestaande algemene tendentie om algebraische theorieën axiomatisch op te bouwen, aantoonde, dat de gehele structuurtheorie van Wedderburn op te stellen viel, niet alleen voor hypercomplexe systemen, maar algemener voor ringen, die voldoen aan zekere voorwaarden, die we straks nader zullen noemen. Hiermee werd de deur geopend voor een tot op heden voortdurende verdere generalisering van de theorie. In deze ontwikkeling kunnen nog twee punten worden onderscheiden:

1°. Pogingen om met behoud van de resultaten van Wedderburn de voorwaarden van Artin verder te verzwakken. Hierin is een vrij sensationeel resultaat bereikt door Hopkins [6] in 1938, die bewees dat een van de twee belangrijkste voorwaarden van Artin gemist kan worden.

2°. Pogingen om met verzwakte voorwaarden een structuurtheorie op te stellen, die eventueel van die van Wedderburn afwijkt. Einddoel van deze ontwikkeling is een structuurtheorie voor ringen zonder enige bijvoorwaarde.

Wij zullen nu eerst de voorwaarden van Artin bespreken. We gaan daartoe uit van een verzameling V en een verzameling Φ van deelverzamelingen van V. We noemen een verzameling $W \in \Phi$ een <u>minimale</u> verzameling in Φ als er geen verzameling $U \in \Phi$ is waarvoor geldt $U \subset W$. (Met $U \subset W$ bedoelen we, dat U een <u>echte</u> deelverzameling van W is; als ook $U = W$ toegelaten wordt, schrijven we $U \subseteq W$). Een analoge definitie geldt voor een <u>maximale</u> verzameling. We moeten onderscheid maken tussen een minimale en een <u>kleinste</u> verzameling in Φ. Een kleinste verzameling in Φ is een verzameling $T \in \Phi$ zodat voor alle $U \in \Phi$ geldt $T \subseteq U$. Φ behoeft in het algemeen noch een kleinste noch een minimale verzameling te bezitten. Als de kleinste verzameling bestaat is zij natuurlijk eenduidig bepaald en dan tevens de enige minimale verzameling. In het algemeen kan er meer dan één minimale verzameling in Φ zijn.

<u>Minimumvoorwaarde</u>: Een verzameling Φ van deelverzamelingen van V voldoet aan de minimumvoorwaarde als iedere niet-lege deelverzameling Ψ van Φ ($\Psi \subseteq \Phi$) een minimale verzameling bevat.

De minimumvoorwaarde is aequivalent met de:

<u>Dalende-kettingvoorwaarde</u>: Bij iedere rij verzamelingen $W_n \in \Phi$, waarvoor geldt $W_n \supseteq W_{n+1}$ is een natuurlijk getal k te vinden, zodat voor $n \geqq k$ geldt $W_n = W_k$. (Een dalende ketting "breekt af").

Dat deze voorwaarden inderdaad aequivalent zijn is heel makkelijk in te zien: Als de minimumvoorwaarde niet geldt, is in een deelverzameling

Ψ van Φ zonder minimale verzameling makkelijk een niet afbrekende dalende ketting te vinden; als de minimumvoorwaarde wel geldt, breekt bij de index van de minimale verzameling uit de verzameling der W_n de ketting af.
Deze begrippen hadden we nog algemener voor partieel geordende systemen kunnen formuleren. Verder is het duidelijk dat geheel analoge beschouwingen over de maximumvoorwaarde en de stijgende-kettingvoorwaarde gehouden kunnen worden.

Artin ging nu uit van ringen waarvan de l-idealen aan de maximum- en aan de minimumvoorwaarde voldoen en leidde daarvoor de structuurtheorie van Wedderburn af. (Eigenlijk deed hij het algemener voor ringen met operator en idealen die toelaatbaar zijn voor die operatoren. We verwaarlozen dit verder, omdat het voor de opbouw van de theorie van weinig belang is. Het is natuurlijk in zoverre wel belangrijk, dat zonder die toevoeging, de theorie niet eens op hypercomplexe systemen zou kunnen worden toegepast!)
Om na te gaan hoe deze voorwaarden te verzwakken zijn, moeten we eerst zien waar ze in de theorie gebruikt worden. Laten we daartoe eerst eens nagaan hoe ver we met de definitie van het radicaal komen als we aan de ring geen verdere voorwaarden opleggen. Als we de vereniging van alle nilpotente idealen vormen en die het radicaal noemen, is dat een ideaal, dat alle nilpotente eenzijdige idealen omvat. Het zo gevormde radicaal behoeft evenwel zelf niet nilpotent te zijn. Hiervan geven we ter toelichting een voorbeeld.

Eerst tonen we het bestaan van nilpotente ringen aan en wel voor ieder natuurlijk getal n een ring A_n zodat $A_n^n=0$ maar $A_n^{n-1}\neq 0$ is. Het eenvoudigste gaat dit met hypercomplexe systemen, omdat daarvoor van de ringeigenschappen, zoals bekend, alleen de associatieve eigenschap voor de vermenigvuldiging van de basiselementen geverifieerd behoeft te worden. Neem het lichaam der rationale getallen als grondlichaam en hierover een hypercomplex systeem A_n met n-1 basiselementen $e_1,\dots,e_{n-1}$ en de vermenigvuldigingsdefinitie $e_ie_j = e_{i+j}$ als $i+j< n$ en $e_ie_j = 0$ als $i+j\geq n$ is. Deze vermenigvuldiging is blijkbaar associatief, omdat, in welke volgorde ook uitgevoerd, $e_ie_je_k = e_{i+j+k}$ voor $i+j+k<n$ en $e_ie_je_k = 0$ voor $i+j+k\geq n$ is. Een product van n elementen van A_n is blijkbaar steeds 0, dus $A_n^n = 0$, maar $e_1^{n-1} = e_{n-1}\neq 0$, dus $A_n^{n-1}\neq 0$. We vormen nu met behulp van een dergelijke rij ringen $A_1,A_2,\dots$ een nieuwe ring R als volgt. Vorm rijen van de gedaante $(a_1,a_2,\dots)$ met $a_i\in A_i$, met dien verstande evenwel, dat slechts eindig veel der $a_i\neq 0$ mogen zijn. De optelling, aftrekking en vermenigvuldiging geschiedt componentsgewijze, dus $(a_1,a_2,\dots)\pm(b_1,b_2,\dots)=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2,\dots)$,

$(a_1,a_2,\dots)(b_1,b_2,\dots) = (a_1\, b_1, a_2\, b_2,\dots)$. Men noemt dit de discrete directe som der A_i. Nu is in R de verzameling der elementen $(a_1,a_2,\dots)$, waarvoor alle $a_i = 0$ voor $i > n$ bij een <u>vaste</u> n, blijkbaar een nilpotent ideaal en daar ieder element in zo'n nilpotent ideaal ligt is het radicaal van R gelijk aan R. Maar R is zelf niet nilpotent, want als we in A_{n+1} een element b kiezen, waarvoor $b^n \neq 0$ is, is van het element $(a_1,a_2,\dots)$ van R waarvoor geldt $a_i = 0$ voor $i \neq n+1$ en $a_{n+1} = b$ ook de n^e macht $\neq 0$.

Als echter van een ring A het radicaal R nilpotent is ($R^n = 0$), heeft de restklassenring A/R radicaal nul. Stel n.l. dat B/R een nilpotent ideaal is, dan is $(B/R)^k = 0$, $B^k \equiv 0(R)$, dus $B^{nk} = 0$, dus $B \equiv 0(R)$, dus $B/R = 0$.

Het is nu heel eenvoudig om uit de maxmimumvoorwaarde voor r-idealen (of nog zwakker: voor nilpotente idealen) af te leiden, dat het radicaal R nilpotent is. Neemt men n.l. een maximaal nilpotent ideaal M, dan volgt uit het door directe berekening makkelijk te verifiëren feit, dat de som van twee nilpotente idealen weer nilpotent is, dat M alle nilpotente idealen en dus ook hun vereniging R bevat. Anderzijds is M als nilpotent ideaal zelf bevat in R, dus M = R en R is nilpotent.

Het opmerkelijke is nu, dat dit de enige plaats in de hele theorie van Artin is, waar de maximumvoorwaarde gebruikt wordt. Het is echter toch aan de andere kant niet zo verwonderlijk, dat juist daar deze voorwaarde nodig zou zijn; immers de bewering "R is nilpotent" heeft zelf het karakter van een maximumuitspraak, hetgeen nog duidelijker blijkt als we de aequivalente bewering, "de verzameling van nilpotente idealen bevat een grootste" opstellen. Het is daarom wel verassend, dat Hopkins [6] deze bewering uitsluitend uit de minimumvoorwaarde wist af te leiden. We laten hier een nog ietwat gemoderniseerd bewijs daarvan volgen (zie Levitzky [12] en [15]):

We veronderstellen, dat als $B_1, B_2,\dots$ idealen in een ring A zijn die alle in het radicaal R van A zijn bevat, de dalende ketting

$$B_1 \supseteq B_1B_2 \supseteq B_1B_2B_3 \supseteq \dots$$

afbreekt. D.w.z. er is een index k zodat voor $n \geq k$ geldt $B_1B_2 \dots B_n = B_1B_2 \dots B_k$.

We beschouwen nu de ketting $R \supseteq R^2 \supseteq R^3 \supseteq \dots$. Dit is een ketting van de zoëven beschreven soort; er is dus een n, zodat $R^{n+1} = R^n$. We willen bewijzen, dat $R^n = 0$. Stel daarom $R^n \neq 0$ en noem $R^n = B$. Dan is $B = B^m$ voor iedere natuurlijke m. Er is nu een $b_1 \in B$ te vinden, zodat $B\, b_1\, B \neq 0$ is (anders was $B = B^3 = 0$). Noem $B\, b_1\, B = B_1$, dan is B_1 een ideaal in A, dat bevat is in R. Verder is $B_1\, B^3 = B_1$. Er is nu een

$b_2 \in B$ te vinden, zodat, als $B\, b_2\, B = B_2$ gesteld wordt, $B_1 B_2 \neq 0$ is (anders was $B_1 = B_1 B^3 = 0$). B_2 is weer een ideaal in A_1 dat in R bevat is. Dit procédé is met volledige inductie voort te zetten en levert een rij idealen $B_1, B_2, \ldots$ zodat alle $B_i \subseteq R$ zijn en voor iedere m $B_1 B_2 \ldots B_m \neq 0$ is. Deze ketting breekt nu af, d.w.z. er is een k, zodat $B_1\, B_2 \ldots B_k = B_1 B_2 \ldots\, B_k B_{k+1}$ is. Door successievelijke vermenigvuldiging van rechts met B_{k+1} volgt hieruit $B_1 B_2 \ldots B_k\ = B_1 B_2 \ldots\ B_{k+1}^m$ voor iedere m. Daar bovendien $B_1 B_2 \ldots B_k \neq 0$ is, is ook $B_{k+1}^m \neq 0$ voor alle m. Maar nu is b_{k+1} een element van R en ligt dus in een nilpotent ideaal, dat zeker ook $B b_{k+1}\, B = B_{k+1}$ omvat. Dus is B_{k+1} nilpotent. Dit geeft een tegenspraak en dus is $B = R^n = 0$.

Daarmee is de maximumvoorwaarde geheel uit de theorie geëlimineerd. Men kan door b.v. in de Moderne Algebra van Van der Waerden bovenstaand bewijs in te lassen en de maximumvoorwaarde te schrappen een theorie van ringen met minimumvoorwaarde krijgen (zie ook het boekje van Artin, Nesbitt en Thrall [19]).

Voor algemene ringen is de moeilijkheid hiermee echter nog niet opgelost. De oude definitie van radicaal blijkt daar niet zo heel bruikbaar te zijn. Verschillende auteurs hebben nu andere begrippen radicaal opgesteld, die alle bepaalde voor- en nadelen blijken te bezitten. Alvorens deze begrippen te bespreken, bepalen we eerst de eisen welke we aan het radicaal zullen stellen. Als we nagaan wat het gebruik van het radicaal bij ringen met minimumvoorwaarde aan gemak oplevert, dan zien we dat daarmee het probleem van de structuurbepaling van ringen in twee eenvoudiger problemen gesplitst wordt, n.l. van een nilpotente ring (het radicaal) en een ring zonder nilpotente idealen $\neq 0$ (de restklassenring naar het radicaal). Daarom stellen we de volgende eisen:

1°. Het radicaal moet een ideaal zijn.

2°. De restklassenring naar het radicaal moet een radicaal nul (volgens dezelfde radicaaldefinitie) hebben.

De definitie van radicaal als vereniging van de nilpotente idealen voldoet niet aan de tweede eis. Als de radicaaldefinitie aan de twee eisen voldoet is het structuurprobleem teruggebracht tot dat van ringen die een radicaal kunnen zijn (<u>radicale ringen</u>) en ringen waarvan het radicaal nul is (<u>halfenkelvoudige ringen</u>). Het gaat er nu om het zo handig te doen, dat het structuurprobleem er inderdaad eenvoudiger van wordt.

Om aansluiting aan het klassieke geval te krijgen kunnen we er nog de volgende (niet strikt noodzakelijke) eis aan toevoegen:

3°. De definitie moet zo zijn, dat als de ring aan de minimumvoorwaarde voor l-idealen voldoet, zij met de klassieke definitie (voortaan genaamd W-radicaal) overeenstemt.

We kunnen verder nog opmerken dat naarmate men het radicaal groter maakt te verwachten is, dat het structuurprobleem voor radicale ringen moeilijker en voor halfenkelvoudige ringen eenvoudiger wordt. Zo leiden de straks te bespreken radicaaldefinities van Jacobson en van Brown en McCoy, die "grote" radicalen definiëren, tot een zeer bruikbare theorie van halfenkelvoudige ringen, die een natuurlijke generalisering van die van Wedderburn is, dit echter ten koste van een gecompliceerde structuur der radicale ringen.

De eerste verruiming van het begrip radicaal is afkomstig van Koethe [4], die gebruik maakt van nilidealen en nilringen in plaats van van nilpotente idealen en ringen. Een nilring is een ring, waarvan alle elementen nilpotent zijn. Evenzo nilideaal, l-nilideaal, r-nilideaal. De vereniging van alle nilidealen is zelf een nilideaal en de restklassenring naar dat ideaal is een ring zonder nilidealen $\neq 0$. Inderdaad, als we deze vereniging R noemen, en B/R is een nilideaal, en $b \in B$, dan is $b^n \in R$, dus $b^{nm} = 0$, dus B een nilideaal, $B \subseteq R$, $B/R = 0$. Deze R voldoet dus aan de eerste twee bovengenoemde eisen. Voor de structuurbepaling van de halfenkelvoudige ringen is echter de grote moeilijkheid, dat het tot op heden niet gelukt is te bewijzen dat R ook alle eenzijdige nilidealen bevat. Dit is een belangrijk open probleem uit de theorie der ringen; het is n.l. ook nooit gelukt een tegenvoorbeeld te construeren. We komen er straks op terug. Koethe definieert het radicaal (voortaan K-radicaal) als de vereniging van alle nilidealen, mits deze ook alle l-nilidealen omvat en dan ook automatisch alle r-nilidealen. Het r-ideaal voortgebracht door een element a dat in een l-nilideaal ligt is een r-nilideaal: $a x + n a$ (x willekeurig in A, n een geheel getal) geeft $(a x + n a)^2 = a x a x + n a x a + n a^2 x + n^2 a^2 = a y$. Als $(ya)^{\ell} = 0$, dan is $(ay)^{\ell+1} = a(ya)^{\ell} y = 0$. Het is niet bekend of het K-radicaal in alle ringen bestaat. Dat de vereniging van alle nilidealen aan de derde eis voldoet is een speciaal geval van een straks te bespreken algemenere stelling.

Baer [14] definieert een radicaal ideaal als een nilideaal zodat de restklassenring naar dat ideaal geen nilpotente idealen $\neq 0$ (en dus geen nilpotente l-idealen $\neq 0$) bevat. De vereniging van alle nilidealen is, zoals hierboven aangetoond is, een radicaal ideaal, dat dus tevens de vereniging is van alle radicale idealen. We noemen dat het bovenradicaal U. De doorsnede van alle idealen met restklassenring zonder nilpotente idealen $\neq 0$ is een radicaal ideaal, dat dus tevens doorsnede is van alle radicale idealen en het benedenradicaal L genoemd wordt. L is een nilideaal omdat het in U bevat is. Laat B/L een nilpotent ideaal in A/L zijn.

Dan is $B^n \subseteq L$. Kies nu een willekeurig ideaal T zodat A/T geen nilpotente idealen $\neq 0$ bevat, dan is $L \subseteq T$, $(T,B)^n \subseteq (T,B^n) \subseteq (T,L) = T$, dus $((T,B)/T)^n = 0$, $(T,B)/T = 0$, $(T,B) \subseteq T$, $B \subseteq T$. Daar dit voor alle dergelijke T geldt, is $B \subseteq L$, $B/L = 0$.

In het algemeen hoeft L niet gelijk aan U te zijn. Baer geeft zelfs een voorbeeld van een ring, waarin $L \subset U$ is en er een ideaal tussen L en U bestaat, dat geen radicaal ideaal is! Hij definieert een radicaal (B-radicaal) alleen als U = L is. Het W-radicaal W is altijd in L bevat: Stel M een nilpotent ideaal: $M^n = 0$, dan is $(M,L)^n \subseteq (M^n,L) = L$, dus $((M,L)/L)^n = 0$, $(M,L)/L = 0$, $M \subseteq L$, dus $W \subseteq L$.

Als we vooruitlopen op hetgeen we straks zullen bewijzen, n.l. dat als de minimumvoorwaarde voor l-idealen geldt, U gelijk is aan het W-radicaal W, kunnen we aantonen dat het B-radicaal aan de derde eis voldoet. Immers altijd is $L \geq W$, dus $L = U = W$. Aan de eerste twee eisen voldoet het B-radicaal omdat U er aan voldoet.

Levitzky [11] [12] gebruikt voor zijn radicaaldefinitie het begrip seminilpotent ideaal. Een ring heet seminilpotent als iedere deelring voortgebracht door eindig veel elementen nilpotent is. Evenzo seminilpotent l-ideaal, r-ideaal of ideaal, met dien verstande dat het woord deelring blijft staan, en niet door deelideaal vervangen wordt. Een seminilpotent ideaal is uiteraard een nilideaal en een nilpotent ideaal is seminilpotent. Hij bewijst, dat de vereniging van alle seminilpotente idealen weer een seminilpotent ideaal is, dat tevens alle seminilpotente eenzijdige idealen omvat. Hij noemt die het radicaal (L-radicaal). Verder is het L-radicaal van de restklassenring naar het L-radicaal nul. Het L-radicaal M is blijkbaar een radicaal ideaal en ligt dus tussen U en L.

Alle tot nu gedefinieerde radicalen waren nilidealen. Jacobson [17] heeft dat laten varen en heeft zijn radicaaldefinitie gebaseerd op een in 1942 door Perlis [9] gevonden nieuwe karakterisering van het radicaal van een hypercomplex systeem. Een element z heet rechtsquasiregulier als er een element z' bestaat, zodat $z + z' - z z' = 0$ is; z' heet dan een rechts-quasi-inverse van z. Als de ring een één heeft betekent dit: $(1-z)(1-z') = 1$, dus $1 - z$ heeft een rechtsinverse. De theorie van quasi-reguliere elementen en quasi-inversen is ook te behandelen door een nieuwe operatie $\circ$ in te voeren door $a \circ b = a + b - ab$, welke operatie als grondoperatie van de ring in plaats van de vermenigvuldiging gebruikt kan worden (zie Andrunakievitch [21]). We gaan er niet verder op in. Beschouwen we nu het rechtsideaal $\{x - z\,x\}$ (z vast, x doorloopt A). Als z rechts quasiregulier is is $-z = z' - z\,z' \in \{x - z\,x\}$, dus $z\,x \in \{x - z\,x\}$, dus $x \in \{x - z\,x\}$, $\{x - z\,x\} = A$. Als omgekeerd

$\{x - z x\} = A$ is, is $- z = z - z z'$, dus z rechts quasiregulier. De voorwaarde $\{x - z x\} = A$ geeft dus een aequivalente definitie van rechts quasiregulariteit. Een r-ideaal heet quasiregulier als alle elementen rechts quasiregulier zijn. Het is makkelijk na te rekenen dat de som van twee quasireguliere r-idealen weer quasiregulier is. Daaruit volgt, dat de vereniging van alle quasireguliere r-idealen weer een quasiregulier r-ideaal is. Het is echter zelfs een ideaal. Noem dit het J-radicaal. De hele beschouwing kan ook met links in plaats van rechts gelezen worden. Dit leidt tot hetzelfde J-radicaal, dat dus een quasiregulier ideaal is dat alle quasireguliere r- en l-idealen omvat. Van de restklassenring naar het J-radicaal is het J-radicaal nul.

Een nilpotent element a ($a^n = 0$) is rechts quasiregulier: $a' = -\sum_{i=1}^{n-1} a^i$ geeft $a + a' - aa' = 0$. Het J-radicaal bevat dus het bovenradicaal. Het kan inderdaad groter zijn, zoals Jacobson aan een voorbeeld laat zien.

We bewijzen nu, dat als de minimumvoorwaarde voor l-idealen geldt, het J-radicaal J nilpotent is. Daar J alle tot nu toe behandelde radicalen omvat is dan voor al die radicalen bewezen, dat ze aan de derde eis voldoen.

Beschouw de ketting $J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \dots$, Deze breekt af dus er is een n, waarvoor $J^n = J^{n+1}$ is. Noem $J^n = B$ en stel $B \neq 0$. Nu is $B = B^2$. Er is nu een minimaal l-ideaal waarvoor geldt $C \subseteq B$ en $BC \neq 0$. Stel $c \in C$ zodat $B c \neq 0$ is. Dan is $B(Bc) = Bc \neq 0$. Verder is $Bc \subseteq C$ en Bc een l-ideaal, dus $Bc = C$; er is dus een $b \in B$, zodat $bc = c$ is. Maar b heeft een links quasi-inverse b', maar dat geeft $0 = c - bc - b'c + b'bc = c - (b+b'-b'b)c = c$ in strijd met $Bc \neq 0$. Dus $B = 0$, J is nilpotent.

Zoals al eerder opgemerkt, is het voordeel van het J-radicaal, dat voor een J-halfenkelvoudige ring het structuurprobleem tot een bevredigende oplossing kan worden gebracht.

Nog iets verder gaan Brown en McCoy [20] [22] die van het r-ideaal $\{ax - x\}$ direct op het door dit r-ideaal voortgebrachte ideaal overgaan, dus op het ideaal

$$G(a) = \{a x - x + \sum_i (y_i a z_i - y_i z_i)\}$$

waarin x, y_i, z_i de ring doorlopen. a heet G-regulier als $a \in G(a)$. Een ideaal heet G-regulier als al zijn elementen het zijn. Het BM-radicaal is de vereniging van alle G-reguliere idealen.

Dit kan nog verder gegeneraliseerd worden door uit te gaan van een voor alle elementen van alle ringen gedefinieerde afbeelding $a \rightarrow F(a)$, waarbij F(a) een ideaal is in dezelfde ring waar a in ligt, zodat als $a \rightarrow \bar{a}$ een homomorfe afbeelding is van R op $\bar{R}$, $F(\bar{a}) = \overline{F(a)}$ (G(a) voldoet hieraan). We noemen dan a F-regulier als $a \in F(a)$ is. Dit leidt dan weer tot een radicaaldefinitie die aan de eerste twee eisen voldoet.

Dat het BM-radicaal ook aan de derde eis voldoet volgt uit de stelling, dat als de minimumvoorwaarde voor l-idealen geldt, het BM-radicaal met het J-radicaal samenvalt. (In het algemeen is het BM-radicaal groter dan het J-radicaal). Het bewijs zou ons te ver voeren.

Een halfenkelvoudige ring met minimumvoorwaarde voor l-idealen is, zoals in de klassieke structuurtheorie bewezen wordt, isomorf met een directe som van eindig veel enkelvoudige ringen met één. (Een ring heet enkelvoudig als de enige idealen van de ring het nulideaal en de ring zelf zijn).

Voor een BM-halfenkelvoudige ring zonder verdere bijvoorwaarde geldt nu een zeer analoge stelling, alleen wordt de directe som vervangen door een z.g. subdirecte som (voor de definitie zie b.v. G. Birkhoff, Lattice Theory) en het aantal sommanden behoeft niet meer eindig te zijn.

Ten slotte willen we nog enkele opmerkingen maken over het hierboven genoemde open probleem (zie blz. 6). Aequivalent ermee is het volgende probleem:

Is de som van twee l-nilidealen weer een l-nilideaal?

Als U alle l-nilidealen omvat (als het K-radicaal bestaat), is natuurlijk de som van twee l-nilidealen een l-nilideaal (alles ligt in U).

Als omgekeerd de som van twee l-nilidealen een l-nilideaal is, is de vereniging T van alle l-nilidealen weer een l-nilideaal. We bewijzen dat T zelfs een ideaal is en gebruiken daarvoor het eerder bewezen feit dat het r-ideaal (l-ideaal), dat voortgebracht wordt door een element van een l-nilideaal (r-nilideaal) een r-nilideaal (l-nilideaal) is. Neem nu een willekeurig element a uit T en een willekeurig element x uit de ring A. Dan is het door a voortgebrachte r-ideaal een r-nilideaal. Dit bevat ax, en dus is het door ax voortgebrachte l-ideaal een l-nilideaal, dat in T bevat is. Dus $ax \in T$; T is een ideaal. Maar nu is T als nilideaal in U bevat: U bevat alle l-nilidealen.

Met behulp van het begrip seminilpotent is het probleem ook nog ietwat anders te benaderen. Een l-nilideaal, dat niet in U bevat is, is zeker niet seminilpotent, omdat het anders in het L-radicaal bevat was, dat op zijn beurt weer in U bevat is. Daaruit volgt, dat het een deelring met eindig veel voortbrengenden bevat, die niet nilpotent is. Als het dus zou lukken te bewijzen, dat iedere nilring met eindig veel voortbrengenden nilpotent is, zou daarmee het open probleem opgelost zijn, want dan zou altijd U ieder l-nilideaal bevatten. Door de beperking tot eindig veel voortbrengenden ziet dat probleem er eenvoudiger uit. Zo zou het bij gebruikmaking van transfiniete methoden nuttig kunnen zijn, dat zo'n ring aftelbaar is.

Als A een nilring $\neq 0$ met eindig veel voortbrengen is, dan is $A^2 \subset A$.

Het bewijs hiervan wordt geleverd met een methode van Levitzky [18]. Stel dat $A^2 = A$ is. Noem de voortbrengenden van A: $a_1, \dots, a_n$. Dan is $A = A^2 = (a_1 A, \dots, a_n A)$. Als $n = 1$ is, volgt uit $A = a_1 A$, dat $A = a_1^m A$, maar a_1 is nilpotent, dus $A = 0$. Tegenspraak. Als $n > 1$ is kiezen we m zo, dat $A = (a_1 A, \dots, a_m A)$, maar $A \supset (a_1 A, \dots, a_{m-1} A) = T$ is. Dan is $A = (T, a_m A)$, dus $a_m = b_1 + a_m c$, $b_1 \in T$, $c \in A$. Daaruit volgt direct voor iedere natuurlijke s: $a_m = b_s + a_m c^s$ met $b_s \in T$, omdat T een r-ideaal is. Maar c is nilpotent, dus $a_m \in T$, $A = T$. Tegenspraak. $A^2 = A$ is dus onmogelijk, dus $A^2 \subset A$.

Als A een ring met eindig veel voortbrengenden is, dan ook A^n. Dit is zeer eenvoudig in te zien.

Als A een nilring met eindig veel voortbrengenden is, die aan de minimumvoorwaarde voor idealen voldoet, is A nilpotent. Immers als we de dalende ketting idealen

$$A \supseteq A^2 \supseteq A^3 \supseteq \dots$$

beschouwen, dan is $A^n = A^{n+1}$ voor een zekere n. Als dan $A^n \neq 0$ was, was $(A^n)^2 = A^n$ in strijd met het bovenstaande. Dus $A^n = 0$.

Als A niet nilpotent is, geldt dus $A \supset A^2 \supset A^3 \supset \dots$. Om te bewijzen, dat A nilpotent is, zou hieruit dus een tegenspraak moeten worden afgeleid.

Summary.

In this paper the definitions of the radical of a ring, which are proposed by several authors, and their mutual relations are discussed. Finally some considerations are given on the following open problem: "Does the join of all nilideals of a ring contain all left nilideals?"

Literatuur.

[1] J.H.McLagan Wedderburn, On hypercomplex numbers, Proc.London Math. Soc. (2) 6 (1908), 77-118.

[2] E.Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abh.Math.Sem. Univ. Hamburg 5 (1928), 251-260.

[3] G. Koethe, Ueber maximale nilpotente Unterringe und Nilringe, Math.Ann. 103 (1930), 359-363.

[4] G. Koethe, Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, Math.Z. 32 (1930), 161-186.

[5] M. Deuring, Algebren, Erg.d.Math. IV 1 (1935).

[6] C. Hopkins, Nil-rings with minimal condition for admissible left ideals, Duke Math.J. 4 (1938), 664-667.

[7] J. Levitzky, On rings which satisfy the minimum condition for the right-hand ideals, Compositio Math. 7 (1939), 214-222.

[8] K. Asano, Ueber Ringe mit Vielfachenkettensatz, Proc.Imp.Acad. Tokyo 15 (1939), 288-291.

[9] S. Perlis, A characterization of the radical of an algebra, Bull. Amer.Math.Soc. 48 (1942), 128-132.

[10] R. Brauer, On the nilpotency of the radical of a ring, Bull.Amer. Math.Soc. 48 (1942), 752-758.

[11] J. Levitzky, On the radical of a general ring, Bull.Amer.Math. Soc. 49 (1943), 462-466.

[12] J. Levitzky, Semi-nilpotent ideals, Duke Math.J. 10 (1943), 553-556.

[13] N. Jacobson, The theory of rings (1943).

[14] R. Baer, Radical ideals, Amer.J.Math. 65 (1943), 537-568.

[15] J. Levitzky, A characteristic condition for semiprimary rings, Duke Math.J. 11 (1944), 367-368.

[16] S.A. Jennings, A note on chain conditions in nilpotent rings and groups, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 759-763.

[17] N. Jacobson, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer.J.Math. 67 (1945), 300-320.

[18] J. Levitzky, On three problems concerning nil-rings, Bull.Amer. Math.Soc. 51 (1945), 913-919.

[19] E. Artin, C.J.Nesbitt, R.M.Thrall, Rings with minimum condition (1946).

[20] B. Brown, N.H. McCoy, Radicals and subdirect suns, Amer.J.Math. 69 (1947), 46-58.

[21] V. Andrunakievitch, Semi-radical and radical rings, C.R. (Doklady) Acad.Sci. URSS (N.S.) 55 (1947), 3-5.

[22] B. Brown, N.H.McCoy, The radical of a ring, Duke Math.J. 15 (1948), 495-499.
