STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1959 - 013

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

A.H.M. Levelt

26 september 1959

Het electromagnetisch veld in twee halfruimten, veroorzaakt door een discontinue antenne-excitatie in het grensvlak

1959

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

door

A.H.M. Levelt

26 september 1959

Het electromagnetisch veld in twee halfruimten, veroorzaakt door een discontinue antenne-excitatie in het grensvlak.

1. Probleemstelling.

Als sterk vereenvoudigd model voor een radiozender op het aardoppervlak kunnen wij beschouwen twee halfruimten, waarbij in het grensvlak een harmonisch oscillerende electrische dipool is geplaatst, loodrecht op het grensvlak. Deze halfruimten worden bovendien homogeen verondersteld t.a.v. de electromagnetische eigenschappen, maar de diëlectrische constanten, de magnetische permeabiliteit en het geleidingsvermogen der beide halfruimten kunnen verschillen. A. Sommerfeld [1] slaagde erin voor dit geval het electromagnetisch veld te berekenen (zie § 2). Wij zullen dit probleem verder het probleem van Sommerfeld noemen.

De kwestie die ons zal bezighouden wijkt in zoverre af van Sommerfeld's probleem, dat de harmonisch oscillerende dipool is vervangen door een dipool, waarvan het moment op een zeker tijdstip van 0 naar een constante waarde $\neq 0$ springt. B. van der Pol [2] gaf voor dit discontinue geval een oplossing in operationele vorm, en berekende het electromagnetisch veld langs het grensvlak. In § 3 wordt de oplossing voor het discontinue geval op soortgelijke wijze als in [2] uitgedrukt in de oplossing van het probleem van Sommerfeld. Via verschillende wegen ([3] en [4]) kan hieruit de oplossing in de vorm van complete elliptische integralen verkregen worden. De resultaten zijn in § 4 weergegeven.

§ 2. Het probleem van Sommerfeld.

Wij zullen hier volstaan met de mathematische formulering van het in § 1 beschreven probleem van Sommerfeld, en het weergeven van diens eindresultaten. Voor een uitvoerige behandeling wordt naar [1] of [5], p.918-925 verwezen. Men kan aantonen([5], p. 790), dat voor ieder der boven beschreven halfruimten een 3-dimensionaal vectorveld $\vec{\Pi}(x,y,z;t)$ ("Hertz-vector") bestaat zó, dat

$$\Delta \vec{\Pi} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

waarin μ de magnetische permeabiliteit, ε de diëlectrische constante van de betreffende halfruimte is en c de voortplantingssnelheid in vacuum is. Ter vereenvoudiging is hier en in het volgende het geleidingsvermogen =0 gesteld. Deze $\vec{\Pi}$ beschrijft het electromagnetisch veld volledig door

$$\vec{E} = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} + \nabla\cdot(\nabla\cdot\vec{\Pi}), \quad \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\,\nabla\times\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t}\,. \tag{2}$$

Er zullen nu verder cylindercoordinaten ρ, φ, z gebruikt worden, waarbij $R=\sqrt{\rho^2+z^2}$. Het vlak z=0 is het grensvlak der halfruimten 1 en 2. De z-as valt samen met de as van de dipool. $z>0$ is de halfruimte 1 (de lucht), terwijl $z<0$ de halfruimte 2 (de aarde) is. De Hertz-vectoren, veldgrootheden en constanten worden van de index der betreffende halfruimte voorzien. Het Sommerfeld-probleem luidt dan: Bepaal Hertz-vectoren $\vec{\Pi}_1$ en $\vec{\Pi}_2$, die

1. voor $z>0$ en $z<0$ aan (1) voldoen met resp. $\mu\varepsilon=\mu_1\varepsilon_1$ en $\mu\varepsilon=\mu_2\varepsilon_2$,
2. de eigenschap hebben dat H_φ en E_ρ aan beide zijden van het grensvlak gelijk zijn,
3. in de oorsprong zodanig zijn, dat een oscillerende (infinitesimale) electrische dipool wordt voorgesteld,
4. voldoende snel naar nul gaan als $R\to\infty$.

Sommerfeld heeft getracht voor het geval $\mu_1=\mu_2=1$ een oplossing te vinden, waarbij $\vec{\Pi}_1$ en $\vec{\Pi}_2$ steeds parallel met de z-as zijn. We kunnen dan de pijltjes weglaten. De voorwaarde 2. leidt tot

$$\varepsilon_1\Pi_1 = \varepsilon_2\Pi_2 \text{ en } \frac{\partial\Pi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Pi_2}{\partial z}\,. \tag{3}$$

De voorwaarde 3. eist, dat in de oorsprong geldt

(4) $$\Pi_i \sim \frac{C_i}{R} e^{-i\omega t} .$$

(Eenvoudigheidshalve werken we met complexe e-machten i.p.v. sin of cos). De door Sommerfeld gevonden oplossing luidt

(5)
$$\Pi_1 = e^{-i\omega t}.2k_2^2 \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\rho)e^{-z\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\lambda\, d\lambda}{k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}} \qquad z>0,$$
$$\Pi_2 = e^{-i\omega t}.2k_1^2 \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\rho)e^{z\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\lambda\, d\lambda}{k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}} \qquad z<0,$$

waarin de reële delen der vierkantswortels $\geqslant 0$ zijn, en

(6) $$k_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}, \qquad k_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2}\,.$$

We veronderstellen verder dat het tweede medium optisch dichter is, dus dat $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

§ 3. Het discontinue geval.

Op voor de hand liggende wijze kunnen wij het discontinue probleem terugvoeren op dat van § 2, n.l. door superpositie van harmonische dipolen met verschillende frequentie. Laten Π_1^* en Π_2^* de Hertz-vectoren (eigenlijk de z-componenten daarvan) zijn die de oplossing voor het discontinue geval geven. We zullen dan i.p.v. (4) moeten eisen

(7) $$\Pi_i^* \sim \begin{cases} 0 & \text{als} \quad t<0 \\ \frac{C_i}{R} & \text{als} \quad t>0 \end{cases}$$

voor $R \sim 0$. Uit (7) en (4) blijkt hoe wij Π_i^* uit oplossingen Π_i moeten samenstellen, n.l.

(8) $$\Pi_i^* = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} \frac{\Pi_i}{\omega}\, d\omega ,$$

waarin $\delta > 0$ is. Uit (5) en (8) volgt, dat het discontinue probleem als oplossing heeft

$$\Pi_1^* = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_W \frac{e^{wt}}{w}\,dw \quad 2\varepsilon_2 \int_0^\infty \frac{J_o(\lambda\rho)e^{-z\sqrt{\lambda^2+\frac{\varepsilon_1}{c^2}w^2}}\lambda\,d\lambda}{\varepsilon_2\sqrt{\lambda^2+\frac{\varepsilon_1}{c^2}w^2}+\varepsilon_1\sqrt{\lambda^2+\frac{\varepsilon_2}{c^2}w^2}} \quad (z>0)$$

(10)

$$\Pi_2^* = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_W \frac{e^{wt}}{w}\,dw \cdot 2\varepsilon_1 \int_0^\infty \frac{J_o(\lambda\rho)e^{z\sqrt{\lambda^2+\frac{\varepsilon_2}{c^2}w^2}}\lambda\,d\lambda}{\varepsilon_1\sqrt{\lambda^2+\frac{\varepsilon_2}{c^2}w^2}+\varepsilon_2\sqrt{\lambda^2+\frac{\varepsilon_1}{c^2}w^2}} \quad (z<0),$$

waarin W een weg is met parametervoorstelling

$$w = \delta + i\,s \qquad (\delta > 0,\ -\infty < s < \infty).$$

De formules (10) kan men opvatten als de complexe inversie van de Laplace-transformatie

(11) $$p\int_0^\infty e^{-pt}\,\Pi_1^*(t)dt = 2\varepsilon_2\int_0^\infty \frac{J_o(\lambda\rho)e^{-z\sqrt{\lambda^2+\frac{\varepsilon_1}{c^2}p^2}}\lambda\,d\lambda}{\varepsilon_2\sqrt{\lambda^2+\frac{\varepsilon_1}{c^2}p^2}+\varepsilon_1\sqrt{\lambda^2+\frac{\varepsilon_2}{c^2}p^2}} \quad (z>0, p>0),$$

en een soortgelijke uitdrukking met Π_2^*.

§ 4. Resultaten.

Toepassing van de formules uit [3], § 5 levert nu voor de eerste halfruimte ($z > 0$) onmiddellijk

(12) $$\Pi_1^* \quad 0 \quad \text{als} \quad t < \frac{1}{c}R\sqrt{\varepsilon_1}$$

$$\frac{2\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R} - \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\pi_i(\varepsilon_2-\varepsilon_1)} \cdot \int_{-\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1}}^{\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1}} \frac{s\sqrt{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)-s^2}\,ds}{\{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)s^2+\varepsilon_1^2\}\sqrt{-R^2s^2+2izcts+c^2t^2-\varepsilon_1\rho^2}}$$

als $t > \frac{1}{c}R\sqrt{\varepsilon_1}$. (De vierkantswortels zijn > 0 voor $s=0$). De situatie in de tweede halfruimte ($z < 0$) is gecompliceerder. Is $t > \frac{1}{c}R\sqrt{\varepsilon_2}$, dan geldt

$$(13)\qquad \Pi_2^* = \frac{2\varepsilon_1}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R} - \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\pi(\varepsilon_2-\varepsilon_1)} \cdot$$

$$\int_{-\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1}}^{\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1}} \frac{s\sqrt{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)-s^2}\;ds}{\{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)s^2-\varepsilon_2^2\}\sqrt{R^2s^2+2zcts+c^2t^2-\rho^2\varepsilon_2}},$$

analoog met (12). We vinden echter bovendien voor
$-z\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1}+\rho\sqrt{\varepsilon_1} < ct < R\sqrt{\varepsilon_2}$ en $R\rho^{-1} < \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$

$$(14)\quad \Pi_2^* = -\frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{\pi(\varepsilon_2-\varepsilon_1)} \int_{s(t)}^{\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1}} \frac{s\sqrt{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)-s^2}\;ds}{\{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)s^2-\varepsilon_2^2\}\sqrt{R^2s^2+2zcts+c^2t^2-\rho^2\varepsilon_2}},$$

waarin $s(t) = R^{-2}\{-zct+\rho\sqrt{R^2\varepsilon_2-t^2c^2}\}$. Er is een voor de hand liggende fysische interpretatie voor de onderscheiding in de gevallen (13) en (14).

Literatuur

[1] A. Sommerfeld — Ann. der Phys. 28, p.287.

[2] B. van der Pol — On discontinuous electromagnetic waves and the occurrence of a surface wave. Electromagnetic wave theory symposium. Transactions I.R.E. P.G.A.P. 4,288 (1956).

[3] A.H.M. Levelt — Solution of the Laplace inversion problem for a special function. Rapport van het Mathematisch Centrum, ZW 1959-010.

[4] A.H.M. Levelt — Supplement to report ZW 1959-010, Solution of the Laplace inversion problem for a special function. Rapport van het Mathematisch Centrum ZW 1959-012.

[5] Ph. Frank und R. von Mises — Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik II, 2-te vermehrte Auflage.