STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 013

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

A.C. Zaanen

# Enige opmerkingen over lengte en oppervlakte

(samenvatting)

1962

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.),by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962-013

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

A.C. Zaanen

# Enige opmerkingen over lengte en oppervlakte

(samenvatting)

1. Wanneer $K=\{x=x(t),\ y=y(t);\ a \leq t \leq b\}$ een continue kromme is, die zichzelf niet snijdt, dan zegt men (zoals bekend) dat K rectificeerbaar is indien het supremum van de lengten van alle ingeschreven polygonen eindig is. Dit supremum heet dan de lengte van K.

   Indien $x(t)$ en $y(t)$ tot de klasse $C^{(1)}$ behoren (d.w.z. continue afgeleiden hebben), dan is K rectificeerbaar, en de lengte L wordt door de klassieke formule

$$L = \int_a^b \{x'^2 + y'^2\}^{1/2}\, dt$$

   voorgesteld.

   Indien $\varphi(x)$ op $\{x:\ a \leq x \leq b\}$ continu en monotoon niet-dalend is, dan is $K=\{x=x,\ y=\varphi(x);\ a \leq x \leq b\}$ rectificeerbaar, want voor elk ingeschreven polygoon voldoet de lengte $l_{pol}$ aan

$$l_{pol} \leq (b-a) + \{\varphi(b) - \varphi(a)\} .$$

2. Als voorbeelden van zulke krommen zullen de zogenaamde Cantorse krommen besproken worden. Daartoe nemen we een getal $\alpha\,(0 \leq \alpha < 1)$ en positieve getallen $\lambda_0,\ \lambda_1, \ldots$ zó dat $\sum_0^\infty 2^n \lambda_n = 1-\alpha$ . Uit

$[0,1]$ wordt een open interval (symmetrisch t.o.v. het middelpunt) ter lengte $\lambda_0$ verwijderd, uit de overschietende gesloten intervallen worden open intervallen (symmetrisch t.o.v. de middelpunten) ter lengte $\lambda_1$ verwijderd, enz. De overschietende verzameling heet een Cantorse verzameling (behorend bij $\alpha$); de "maat" van deze verzameling is juist $\alpha$. We definiëren nu $\varphi(x)$ als volgt: $\varphi(x)=\frac{1}{2}$ op het eerste verwijderde open interval, $\varphi(x)=\frac{1}{4}$, resp. $\frac{3}{4}$, op de daarna verwijderde intervallen, enz. Door continue voortzetting is $\varphi(x)$ op het gehele interval $[0,1]$ te definiëren. De functie $\varphi(x)$ is dan continu en monotoon niet-dalend, dus $K=\{x=x,\ y=\varphi(x);\ 0\leq x\leq 1\}$ is rectificeerbaar. Voor de lengte L van K geldt

$$L = 1-\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\ .$$

3. Voor $\alpha=0$ krijgen we de klassieke Cantorse verzameling, en de lengte van de bijbehorende Cantorse kromme is $L=2$. Men zou dit kunnen "verklaren" door te zeggen dat de totale lengte van de horizontale segmenten van de kromme reeds 1 is, terwijl er ook nog een totale stijging van 1 moet zijn. Aldus zou het vermoeden rijzen dat als men met een echt monotoon stijgende $\varphi(x)$ te doen heeft, dit verschijnsel van "maximaal mogelijke lengte" zich niet meer voor kan doen. We zullen echter bewijzen dat door superpositie van Cantorse functies een kromme $K=\{x=x,\ y=\varphi(x);\ 0\leq x\leq 1\}$, met $\varphi(x)$ echt monotoon stijgend, verkregen kan worden, waarbij

$$L = 1 + \{\varphi(1)-\varphi(0)\}\ .$$

In dit verband is de volgende stelling van interesse:
Als $K=\{x=x,\ y=\varphi(x);\ 0\leq x\leq 1\}$, waarbij $\varphi$ continu en monotoon niet-dalend, dan is $L=1+\{\varphi(1)-\varphi(0)\}$ dan en alleen dan als de afgeleide $\varphi'(x)$ bijna overal (in de zin van Lebesgue) nul is.

4. Laat $O_1$ een open verzameling in de n-dimensionale Euclidische ruimte $R^n$ zijn, en laat $y=h(x)$ een afbeelding van $O_1$ in $R^n$ zijn met alle $\partial h_i/\partial x_j$ continu. De functionaaldeterminant (Jacobiaan) det $(\partial h_i/\partial x_j)$ geven we aan met $J(x)$. Als $J(x_o)\neq 0$ voor een punt $x_o \in O_1$, dan is de afbeelding h locaal inverteerbaar in $x_o$, d.w.z. als $y_o=h(x_o)$, dan bestaan er open omgevingen van $x_o$ en $y_o$ wier punten omkeerbaar eenduidig met elkaar corresponderen bij de afbeelding h. In de meeste boeken over analyse vindt men nu wel de volgende stelling:

Als $J(x)\neq 0$ op $O_1$, en als $O_1$ en de beeldverzameling $O_2$ ook "in het groot" omkeerbaar eenduidig op elkaar afgebeeld zijn, en $f(y)$ is integreerbaar over $O_2$, dan is

$$\int_{O_2} f(y)dy = \int_{O_1} f\{h(x)\}\,|J(x)|\,dx.$$

Speciaal:

$$\text{opp. van } O_2 = \int_{O_1} |J(x)|\,dx.$$

Het is onwaarschijnlijk dat er een eenvoudige nodige en voldoende voorwaarde voor $h(x)$ aan te geven valt opdat de afbeelding in het groot omkeerbaar eenduidig is. Ik wil echter de aandacht vestigen op de volgende eenvoudige voldoende voorwaarde, die niet zo algemeen bekend schijnt te zijn (mij medegedeeld door Prof. W.A.J. Luxemburg):

Laat bovendien $O_1$ convex zijn, en laat (voor iedere $x \in O_1$) de kwadratische vorm

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}\,\alpha_i\,\alpha_j$$

positief definiet zijn. Dan is $J(x)\neq 0$ in elk punt $x \in O_1$, en de afbeelding h van $O_1$ op $O_2$ is omkeerbaar eenduidig.

Voorbeeld in $R^2$: Laat O open en convex zijn; $h(x,y)=$ $=\{u(x,y),\ v(x,y)\}$ met $\partial u/\partial x= \partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y= -\partial v/\partial x$ en

$\partial u/\partial x > 0$ op O. Dan is bovengenoemde kwadratische vorm positief definiet. Anders gezegd: Als O open en convex is, en $f(z)=u+iv$ is regulier (analytisch) op O met $\partial u/\partial x > 0$ op O, dan is f eenwaardig op O. Alsdus vindt men een resultaat, verwant met o.a. klassieke resultaten van J. Wolff.