ZW 1963-013

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt beschouwd"
door P.C. Sikkema

19 maart 1963

Onderwerp: Over de approximatiestelling van Weierstrass

1. In het volgende stelt $[a,b]$ een segment met positieve eindige lengte voor van de reële x-as.

$V = V[a,b]$ is de verzameling gevormd door de reële functies $f(x)$, die gedefinieerd zijn op $[a,b]$.

$C = C[a,b]$ is de verzameling gevormd door de reële functies $f(x)$, die gedefinieerd en continu zijn op $[a,b]$.

In de verzameling C wordt hier als norm $||f||$ de bekende Tchebycheff-norm

$$||f|| = \max_{x \in [a,b]} | f(x) |$$

ingevoerd.

2. In 1885 bewees Weierstrass [1] de volgende, later naar hem genoemde, approximatiestelling (met algebraïsche polynomen):

Behoort $f(x)$ tot C, dan bestaat er bij ieder getal $\varepsilon > 0$ een polynoom $p(x)$, zodanig dat

$$\| f - p \| < \varepsilon.$$

Van deze stelling zijn sindsdien tal van bewijzen gegeven; in 1951 verscheen er een opmerkelijk nieuw bewijs van Bohman [2], terwijl in 1959 Korowkin [3] een daaraan enigszins verwant bewijs gaf. De laatstgenoemde auteur maakte bij de formulering van zijn stellingen gebruik van het begrip lineaire positieve operator.

Definitie: Een operator $L = L(f(t);x)$ die C afbeeldt in V heet positief als voor elke $f \in C$ waarvoor $f(x) \geqq 0$ op $[a,b]$, geldt

$$L(f;x) \geqq 0 \quad \text{op } [a,b].$$

Voorbeeld. Op $[0,1]$ is de Bernsteinoperator $B_n(f;x)$ $(n=1,2,\ldots)$ positief, hetgeen onmiddellijk volgt uit

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Een lineaire positieve operator $L = L(f(t),x)$ is monotoon in deze zin, dat als $f(x) \geqq g(x)$ op $[a,b]$ ook geldt

$$L(f(t);x) \geqq L(g(t);x).$$

Immers uit $f(x)-g(x) \geqq 0$ op $[a,b]$ volgt $L(f(t)-g(t);x) \geqq 0$, zodat $L(f(t);x) - L(g(t);x)) \geqq 0$.

Van de, hier voor ons belangrijke, stelling 3 van Korowkin [3, p.21] geven wij nu een minder algemene vorm en daarvan een iets gemodificeerd bewijs.

Stelling van Korowkin. Gegeven is een rij $\{L_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ van lineaire positieve operatoren $L_n = L_n(f(t);x)$ van $C[a,b]$ in $V[a,b]$, waarbij L_n $(n=1,2,\ldots)$ de eigenschap bezit, dat als men voor $f(t)$ resp. neemt $1,t,t^2$ en schrijft

$$
\text{(1)} \qquad \begin{aligned} L_n(1;x) &= 1 + \alpha_n(x) \\ L_n(t;x) &= x + \beta_n(x) \\ L_n(t^2;x) &= x^2 + \gamma_n(x), \end{aligned}
$$

uniform op $[a,b]$ geldt

$$
\text{(2)} \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_n(x) = \lim_{n\to\infty} \beta_n(x) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(x) = 0.
$$

Bewering: Voor elke $f \in C[a,b]$ geldt uniform op $[a,b]$

$$
\lim_{n\to\infty} L_n(f;x) = f(x).
$$

Bewijs: Laat f een willekeurig gekozen element van $C[a,b]$ zijn. Er bestaat dan een getal M, zodanig dat op $[a,b]$ geldt

$$
|f(x)| \leq M.
$$

Voor elk tweetal punten t en x van $[a,b]$ is dan

$$
|f(t) - f(x)| \leq 2M.
$$

Verder is f op $[a,b]$ uniform continu, zodat er bij ieder getal $\varepsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ bestaat met de eigenschap, dat voor elk paar punten t en x van $[a,b]$ met $|t-x| < \delta$ geldt

$$
|f(t) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon.
$$

Het punt x zij voorlopig een vast punt van $[a,b]$. Dan volgt uit het bovenstaande, dat voor elk punt t van $[a,b]$ geldt

$$
\text{(3)} \qquad |f(t) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2M(t-x)^2}{\delta^2}
$$

Vanwege de lineariteit van L_n $(n=1,2,\ldots)$ is voorts

$$
\text{(4)} \qquad L_n(f(t)-f(x);x) = L_n(f(t);x) - f(x)\, L_n(1;x)
$$

en wegens de monotonie van L_n volgt dan uit (4) en (3)

$$|L_n(f(t);x) - f(x)\, L_n(1;x)| < |L_n(\tfrac{1}{3}\varepsilon + \frac{2M(t-x)^2}{\delta^2}\ ;\ x)|$$

$$= |\tfrac{1}{3}\varepsilon\ L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}\ \{L_n(t^2;x) - 2x\, L_n(t;x) + x^2\, L_n(1;x)\}| \ .$$

Maakt men nu gebruik van (1), dan vindt men dat

$$|L_n(f(t);x) - f(x)\, L_n(1;x)| < |\tfrac{1}{3}\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\ (\gamma_n(x) - x\beta_n(x) + x^2\alpha_n(x)|$$

(5)

$$< \tfrac{1}{3}\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\ \{|\gamma_n(x)| + d\,|\beta_n(x)| + d^2\,|\alpha_n(x)|\}\ ,$$

als men stelt $d = \max(|a|, |b|)$. Uit (2) volgt nu, dat er een natuurlijk getal N_1 bestaat, zodanig dat voor elke $n \geqq N_1$ op $[a,b]$ geldt

$$\frac{2M}{\delta^2}\ \{|\gamma_n(x)| + d\,|\beta_n(x)| + d^2\,|\alpha_n(x)|\} < \tfrac{1}{3}\varepsilon\ .$$

Dan is voor elke $n \geqq N_1$ wegens (5)

$$|L_n(f(t);x) - f(x)\, L_n(1;x)| < \tfrac{2}{3}\varepsilon$$

en hieruit volgt op grond van (1) dat

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| < \tfrac{2}{3}\varepsilon + |f(x)\,\alpha_n(x)| \leqq \tfrac{2}{3}\varepsilon + M|\alpha_n(x)|\ .$$

Krachtens (2) bestaat er bij het getal ε een natuurlijk getal N_2, zodanig dat op $[a,b]$ voor elke $n \geqq N_2$ geldt

$$M\,|\alpha_n(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon\ .$$

Dan is kennelijk voor elke $n \geqq \max(N_1, N_2)$

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| < \varepsilon\ .$$

Daar ε niet van x afhangt en N_1, N_2 evenmin geldt deze betrekking voor iedere x van $[a,b]$, waaruit de juistheid van de bewering volgt.

Bewijs van de approximatiestelling van Weierstrass. Vooreerst zij $[a,b] = [0,1]$. Voor de operatoren L_n $(n=1,2,\ldots)$, genoemd in de stelling van Korowkin, nemen wij de Bernsteinoperatoren. Deze hebben de eigenschap, dat zij lineair en positief zijn en dat

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1,$$

$$B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n} = x,$$

$$B_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{x-x^2}{n}.$$

Blijkbaar is hier $\alpha_n(x) \equiv 0$, $\beta_n(x) \equiv 0$, $\gamma_n(x) \equiv \dfrac{x-x^2}{n}$, zodat aan de voorwaarden, genoemd in de stelling van Korowkin is voldaan. Derhalve is dan voor elke $f \in C[0,1]$ uniform op $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f(t);x) = f(x)$$

en daar $B_n(f(t);x)$ voor $n = 1,2,\ldots$ een polynoom in x is, is daarmee de stelling van Weierstrass voor het segment $[0,1]$ bewezen. Is $[a,b] \neq [0,1]$, dan is door middel van een lineaire transformatie op eenvoudige wijze aan te tonen dat de stelling van Weierstrass op $[a,b]$ eveneens juist is.

3. Daar een polynoom een eindig lineair compositum is van elementen uit de rij $x^0, x^1, x^2, \ldots$ kan men de stelling van Weierstrass ook als volgt formuleren:

Het systeem der elementen

$$(6) \qquad 1 = x^0, x^1, x^2, \ldots$$

is in de verzameling $C[a,b]$ een volledig systeem in de zin der Tchebycheffnorm.

De betekenis van deze formulering is, dat elk element f van C[a,b] zich in de zin der Tchebycheffnorm willekeurig dicht laat approximeren door een eindig lineair compositum uit de rij (6), d.w.z. dat er bij elk element $f \in C$ en bij iedere $\varepsilon > 0$ een eindig lineair compositum $\sum_{k=0}^{n} a_k x^t$ $(n = n(f,\varepsilon))$ bestaat met de eigenschap, dat

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} a_k x^t\| < \varepsilon .$$

Nu is wel bekend, dat men op [0,1] elk afzonderlijk element van de rij (6) willekeurig dicht kan approximeren door middel van eindige lineaire composita uit de overblijvende rij. Daaruit vloeit de vraag voort, of men in de rij (6) meer dan één element kan weglaten, zonder dat de eigenschap van volledigheid in C[0,1] van de overblijvende rij wordt verstoord en, zo ja, hoeveel dit aantal weg te laten elementen kan bedragen. Het antwoord is gegeven door Ch.Müntz [4], die liet zien, dat als men in de rij

$$x^1, x^2, x^3, \ldots$$

elementen schrapt, waarna de overblijvende rij is

$$x^{p1}, x^{p2}, x^{p3}, \ldots,$$

de rij

$$1 = x^0, x^{p1}, x^{p2}, x^{p3}, \ldots \tag{7}$$

dan en slechts dan een volledig systeem in C[0,1] is, als de reeks

$$\sum_{(k)} \frac{1}{p_k} \tag{8}$$

divergent is.

Het "slechts dan" betekent, dat als men zoveel elementen in de rij (6) schrapt, dat de reeks (8) convergent is, er tenminste één element f(x) in C[0,1] aanwezig is, dat zich niet willekeurig dicht laat approximeren door middel van een lineair compositum van eindig veel elementen der rij (7).

Opgemerkt zij nog, dat het voorkomen van het element $1 = x^0$ in (7) noodzakelijk is, opdat deze rij in $C[0,1]$ een volledig systeem is, immers alle overige elementen nemen in het punt $x = 0$ de waarde nul aan.

4. Bewijs van de stelling van Müntz. Van de stelling van Müntz laat zich een "modern" bewijs geven [5], dat gebruik maakt van de Hilbertruimte $L_2\,[0,1]$. Deze ruimte wordt, zoals wel bekend, gevormd door de equivalentieklassen van reële functies $f(x)$, die op het segment $[0,1]$ in de zin van Lebesgue niet alleen meetbaar, doch ook kwadratisch integreerbaar zijn, met als inwendig product $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Twee functies $f(x)$ en $g(x)$ behoren tot dezelfde klasse dan en alleen dan als

$$\int_0^1 \{f(x) - g(x)\}^2\, dx = 0.$$

In $L_2\,[0,1]$ verstaat men onder de norm van $f(x)$ de uitdrukking

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}.$$

De afstand $\rho\,(f,g)$ van f en g wordt dan gegeven door

$$\rho\,(f,g) = \|f - g\|.$$

In de genoemde ruimte beschouwt men de oneindig voortlopende rij (7), waarvoor geschreven wordt

$$1 = \phi_0,\ x^{p1} = \phi_1,\ x^{p2} = \phi_2, \ldots\ .$$

Laat dan d_n de afstand zijn van een willekeurig gekozen element f van $L_2\,[0,1]$ tot de n-dimensionale deelruimte, opgespannen door de elementen $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$. Is

(9) $$g = c_0\,\phi_0 + c_1\,\phi_1 + \ldots + c_n\,\phi_n$$

de projectie van f op deze deelruimte, dan is

$$(f - g,\ c_\alpha) = 0 \qquad (\alpha = 0,1,\dots,n)$$

en verder

$$(f - g,\ f - g) = d_n^{\,2}\ .$$

Vult men in de aldus ontstane n + 2 betrekkingen voor g het lineaire compositum (9) in, dan blijkt, dat aldus voor $c_0,\dots,c_n$ de volgende n + 2 lineaire inhomogene algebraïsche vergelijkingen ontstaan (de laatste betrekking het eerst gebruikt)

$$\begin{cases} \{(f,f)-d_n^{\,2}\} - (f,\phi_0)c_0 - \dots - (f,\phi_n)c_n = 0 \\ (f,\phi_0) - (\phi_0,\phi_0)c_0 - \dots - (\phi_n,\phi_0)c_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (f,\phi_n) - (\phi_0,\phi_n)c_0 - \dots - (\phi_n,\phi_n)c_n = 0 \end{cases}$$

Dan is

$$\begin{vmatrix} (f,f)-d_n^{\,2} & (f,\phi_0) & (f,\phi_1) & \dots & (f\ \phi_n) \\ (f,\phi_0) & (\phi_0,\phi_0) & (\phi_1,\phi_0) & \dots & (\phi_n,\phi_0) \\ (f,\phi_1) & (\phi_0,\phi_1) & (\phi_1,\phi_1) & \dots & (\phi_n,\phi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f,\phi_n) & (\phi_0,\phi_n) & (\phi_1,\phi_n) & \dots & (\phi_n,\phi_n) \end{vmatrix} = 0$$

Door ontwikkeling van de determinant naar de elementen van de eerste rij vindt men hieruit dat

$$d_n^{\,2} = \frac{G(f,\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_n)}{G(\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_n)}\ . \tag{10}$$

Daarbij is $G(u_0,u_1,\dots,u_n)$ de bekende determinant van Gram van de elementen $u_0,u_1,\dots,u_n$. De noemerdeterminant in (10) is niet gelijk aan nul omdat $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ lineair onafhankelijk op $[0,1]$ zijn.

Wegens

$$(\phi_k, \phi_l) = \int_0^1 x^{p_k+p_l}\, dx = \frac{1}{p_k+p_l+1} \qquad (k,l = 0,1,\ldots,n)$$

$(p_0 = 0$ gesteld) is

$$G(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n) = \frac{\prod\limits_{l>k}^{n} (p_l - p_k)^2}{\prod\limits_{k,l=0}^{n} (p_k+p_l+1)}$$

Neemt men nu in het bijzonder voor f het element x^m, waarbij m een willekeurig en daarna vast gekozen natuurlijk getal is, dan is

$$G(x^m, \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n) = \frac{\prod\limits_{l>k}^{n} (p_l - p_k)^2}{\prod\limits_{k,l=0}^{n} (p_k+p_l+1)} \cdot \frac{\prod\limits_{r=0}^{n} (m-p_r)^2}{\prod\limits_{r=0}^{n} (m+p_r+1)^2} \cdot \frac{1}{2m+1},$$

waaruit volgt

$$(11) \qquad d_n^2(x^m) = \frac{G(x^m, \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)}{G(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)} = \frac{1}{2m+1} \prod_{r=0}^{n} \left(\frac{m-p_r}{m+p_r+1}\right)^2 .$$

Opdat het element $f = x^m$ zich willekeurig dicht laat approximeren door middel van een eindig lineair compositum uit de rij (7) is kennelijk nodig en voldoende, dat

$$(12) \qquad \lim_{n\to\infty} d_n^2(x^m) = 0.$$

Klaarblijkelijk is hieraan voldaan als x^m reeds in de rij (7) voorkomt. Komt x^m daarentegen in (7) niet voor, dan is $d_n^2(x^m) > 0$ voor elke n. De voorwaarde (12) is nu wegens (11) equivalent met

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{r=0}^{n} \left(\frac{m+p_r+1}{m-p_r}\right)^2 = \infty ,$$

of wel met

$$(13) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} \ln \left(\frac{m+p_r+1}{m-p_r}\right)^2 = \infty ,$$

Nu is

$$\frac{m+p_r+1}{m-p_r} = 1 + \frac{2m+1}{p_r-m} .$$

Stelt men

$$\frac{2m+1}{p_r-m} = \xi_r ,$$

dan is voor alle voldoend grote waarden van r voldaan aan $p_r > 3m+1$ en voor waarden deze waarden van r.is $0 < \xi_r < 1$.
Daaruit volgt dan

$$\ln (1+ \xi_r) = \xi_r - \frac{1}{2} \xi_r^2 + \ldots > \xi_r - \frac{1}{2} \xi_r^2 > \xi_r - \frac{1}{2} \xi_r = \frac{1}{2} \xi_r$$

Dit betekent, dat als de reeks

$$(14) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \xi_r$$

divergent is, ook $\sum \ln (1+ \xi_r)^2$ divergeert, zodat dan voldaan is aan (13) en daarmee aan (12). Is echter (14) convergent, dan is wegens

$$\ln (1+ \xi_r) < \xi_r ,$$

waaraan voor $p_r > 3m+1$ voldaan is, ook $\sum \ln (1+ \xi_r)^2$ convergent, zodat (13) niet geldt. Bij gevolg is aan (12) dan en alleen dan voldaan als (14) divergent is.

Voorts bestaan er twee vaste positieve getallen α en β, zodanig, dat voor elke r waarvoor $p_r \geq m+1$ is, geldt

$$0 < \frac{\alpha}{p_r} < \frac{1}{p_r - m} < \frac{\beta}{p_r} ,$$

hetgeen betekent, dat de divergentie van (14) equivalent is met de divergentie van

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p_r} . \tag{15}$$

Hieruit volgt, dat in $L_2 [0,1]$ het element x^m (m een natuurlijk getal, dat niet in de rij $p_1, p_2, \ldots$ voorkomt) zich dan en alleen dan in de zin van de norm willekeurig dicht laat approximeren door middel van een eindig lineair compositum uit de rij (7) als de reeks (15) divergent is.

Is voldaan aan de divergentie van (15), dan laat elk element der rij 1, x, $x^2, \ldots$ zich in de zin van de norm in $L_2 [0,1]$ willekeurig dicht approximeren door een eindig lineair compositum uit de rij (7) en omgekeerd. Blijkbaar is dan de divergentie van (7) een nodige voorwaarde opdat elk element f in $L_2 [0,1]$ zich in de zin van de norm willekeurig dicht laat approximeren door middel van eindige lineaire composita uit de rij (7). Dat deze voorwaarde ook voldoende is, blijkt door toepassing van de stelling, die zegt, dat de verzameling der polynomen in de ruimte $L_2 [0,1]$ dicht ligt. Immers, is f een willekeurig gekozen element in $L_2 [0,1]$, dan bestaat er bij iedere $\varepsilon > 0$ volgens deze stelling een polynoom p(x), zodanig dat [6, p.190]

$$\| f - p(x) \| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Voorts bestaat er in geval van divergentie van de reeks (15) blijkens het voorafgaande een eindig lineair compositum uit de rij (7), zodanig dat geldt

$$\| p(x) - \text{lin.comp.} \| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Dan heeft dit lineaire compositum de eigenschap, dat geldt

$$\| f - \text{lin.comp.} \| \quad \varepsilon .$$

Aldus blijkt, dat de divergentie van de reeks (15) nodig en voldoende is, opdat het systeem (7) in L_2 $[0,1]$ in de zin van de daarin beschouwde norm een volledig systeem is.

Terugkerende tot de ruimte $C[0,1]$ ziet men, dat daarin niet de L_2-norm, doch de Tchebycheffnorm aanwezig is. Nu zal worden aangetoond, dat als de reeks (15) divergent is, het stelsel (7) ook in de zin van de Tchebycheffnorm een volledig systeem is. Daartoe wordt eerst een niet in het stelsel (7) optredende macht x^m, waarin m een natuurlijk getal is, beschouwd en bewezen, dat deze macht zich in de zin van de Tchebycheffnorm willekeurig dicht laat approximeren door middel van een eindig lineair compositum uit de rij (7). Er geldt voor het verschil

$$x^m - \sum_{k=0}^{s} b_k \, x^{p_k}$$

het volgende

$$\left| x^m - \sum_{k=0}^{s} b_k \, x^{p_k} \right| = \left| \int_0^x \{ m \, x^{m-1} - \sum_{k=0}^{s} b_k p_k x^{p_k - 1} \} \, dx \right|$$

$$\leq m \int_0^1 \left| \, x^{m-1} - \sum_{k=0}^{s} b_k \frac{p_k}{m} \, x^{p_k - 1} \right| dx$$

$$\leq m \left[\int_0^1 \{ \, x^{m-1} - \sum_{k=0}^{s} b_k \frac{p_k}{m} \, x^{p_k - 1} \}^2 \, dx \right]^{1/2} ,$$

waaruit de bewering omtrent x^m volgt, aangezien x^{m-1} zich willekeurig dicht door een polynoom van de vorm

$$\sum_{k=0}^{s} b_k \frac{p_k}{m} x^{p_k - 1}$$

laat approximeren in de zin van de L_2-norm. Immers uit de divergentie van de reeks (15) volgt de divergentie van de reeks

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p_k - 1} .$$

Toepassing van de stelling van Weierstrass geeft dan het verlangde resultaat.

Is de reeks (15) daarentegen convergent, dan zij x^m (m een natuurlijk getal) een element, dat niet in de rij (7) voorkomt. Dit element laat zich, zoals uit het bovenstaande volgt, in de zin van de L_2-norm niet willekeurig dicht approximeren door middel van een eindig lineair compositum uit de rij (7) gevormd. Dit wil zeggen, dat er een getal $\varepsilon > 0$ bestaat, zodanig, dat voor elk eindig lineair compositum uit de rij (7) in de zin van de L_2-norm geldt

$$\| x^m - \text{lin.comp.} \| > \varepsilon .$$

Dan is voor elk eindig lineair compositum ook

$$\max_{0 \leq x \leq 1} | x^m - \text{lin.comp.} \| > \varepsilon ,$$

zoals onmiddellijk uit het ongerijmde te bewijzen is. Dan is dus ook de Tchebycheffnorm van x^m - lin.comp. groter dan ε, waaruit volgt, dat x^m zich in de zin van de Tchebycheffnorm evenmin willekeurig dicht laat approximeren door een eindig lineair compositum uit de rij (7).

Daarmee is de stelling van Müntz bewezen.

Literatuur.

[1] Weierstrass, K., Uber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen. Sitzungsber. Akad. Berlin (1885). Ook in Werke, Bd III, p.1-37.

[2] Bohman, H., On approximation of continuous and of analytic functions. Ark.Mat. 2 (1952) 43-56.

[3] Korowkin, P.P., Linear operators and approximation theory. Moskou 1959, 211 p. Engelse vertaling: Delhi 1960, 222 p.

[4] Müntz, Ch., Uber den Approximationssatz von Weierstrass. Math.Abhandl. H.A.Schwarz gewidmet. Berlin 1914, p.303-312.

[5] Natanson, J.P., Konstruktive Funktionentheorie. Berlin 1955, 514 p.

[6] Natanson, J.P., Theorie der Funktionen einer reellen Veranderlichen. Berlin 1961, 590 p.