STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-014

Over de irrationaliteit van π

Prof.dr. J. Popken

1948

Over de irrationaliteit van π.

(Voordracht van Prof.Dr J. Popken, 27 October 1948).

1. Het bekende delingsalgorithme voor veeltermen kan men als volgt uitbreiden tot machtreeksen: gaat men uit van de beide reeksen

$$R_0(x)= a_0^{(0)} + a_1^{(0)}\, x^{-2} + a_2^{(0)}\, x^{-4} +\ldots+ a_m^{(0)}\, x^{-2m} +\ldots.$$

$$R_1(x)= a_0^{(1)}\, x^{-1} + a_1^{(1)}\, x^{-3} + a_2^{(1)}\, x^{-5} +\ldots+ a_m^{(1)}\, x^{-2m-1}+\ldots.$$

en is $a_0^{(1)}\neq 0$, dan kan men een reeks

$$R_2(x)= a_0^{(2)}\, x^{-2} + a_1^{(2)}\, x^{-4} +\ldots+ a_m^{(2)}\, x^{-2m-2}+\ldots.$$

vinden, zodat

$$R_0(x) = \frac{a_0^{(0)}}{a_0^{(1)}}\, x . R_1(x) + R_2(x) .$$

Is ook $a_0^{(2)}\neq 0$, dan kan men dit procédé voortzetten met $R_1(x)$ en $R_2(x)$ en zo komt men tot een rij van reeksen

$$R_v(x) = a_0^{(v)}\, x^{-v} + a_1^{(v)}\, x^{-v-2}+\ldots+ a_m^{(v)}\, x^{-v-2m}+\ldots.$$

met

$$R_{v-2}(x)= \frac{a_0^{(v-2)}}{a_0^{(v-1)}}\; x\, R_{v-1}(x) + R_v(x) \qquad (v= 2,3,\ldots,n),$$

indien althans $a_0^{(1)}\neq 0,\ a_0^{(2)}\neq 0,\ldots,\ a_0^{(n-1)}\neq 0$.

Gemakkelijk leidt men de volgende recurrente betrekking af:

$$(1)\qquad a_m^{(v)} = a_{m+1}^{(v-2)} - \frac{a_0^{(v-2)}}{a_0^{(v-1)}}\, a_{m+1}^{(v-1)} \qquad (v = 2,3\ldots,n;\ m = 0,1,\ldots).$$

Met behulp daarvan is het mogelijk om de coëfficiënten van $R_v(x)$ uit te drukken in die van $R_0(x)$ en $R_1(x)$ en wel door middel van determinanten. Speciaal voor $a_0^{(v)}$ vindt men een eenvoudige uitdrukking. Voert men n.l. de oneindige matrix

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} a_0^{(1)} & a_0^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\ a_1^{(1)} & a_1^{(0)} & a_0^{(1)} & a_0^{(0)} & 0 & 0 & \ldots\ldots \\ a_2^{(1)} & a_2^{(1)} & a_1^{(1)} & a_1^{(0)} & a_0^{(1)} & a_0^{(0)} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

in en duidt men de determinant, gevormd uit het eerste v-tal rijen en het eerste v-tal kolommen, aan door D_v(v = 1,2...,n), dan is

(3) $$D_v = a_o^{(1)}\, a_o^{(2)} \ldots\, a_o^{(v)} \quad .$$

2. We nemen nu speciaal

$$R_0(x) = \cos x^{-1} = 1 - \frac{x^{-2}}{2\,!} + \ldots\ldots + (-1)^m \frac{x^{-2m}}{(2m)!} + \ldots\ldots$$

$$R_1(x) = \sin x^{-1} = \frac{x^{-1}}{1\,!} - \frac{x^{-3}}{3\,!} + \ldots\ldots + (-1)^m \frac{x^{-2m-1}}{(2m+1)!} + \ldots\ldots$$

Passen we op deze beide reeksen het voorgaande algorithme toe, dan komt er

(4) $$\begin{cases} \cos x^{-1} = x\cdot\sin x^{-1} + R_2(x) \\ \sin x^{-1} = -3x\cdot R_2(x) + R_3(x) \\ R_2(x) = 5\cdot x\cdot R_3(x) + R_5(x) \\ \text{-------------------------} \\ R_{n-2}(x) = \pm\,(2n-3)x\, R_{n-1}(x) + R_n(x) \\ \text{-------------------------} \end{cases}$$

met

(5) $$R_n(x) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\; 2^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+n-1)!}{m!\,(2m+2n-1)!}\, x^{-2m-n},$$

zoals met behulp van de recurrente betrekking (1) gemakkelijk is te bewijzen.

Met behulp van dit resultaat kunnen we zeer eenvoudig aantonen, dat voor elk rationaal getal $y \neq 0$ de verhouding $\cos y : \sin y$ irrationaal is (Lambert).

We stellen daartoe $x = y^{-1}$, zodat ook x rationaal is; de noemer van dit getal zij a. Verder nemen we nu aan, dat $\cos y$ en $\sin y$ de geheeltallige verhouding $p : q$ hebben, zodat

$$\cos x^{-1} = p\rho \quad , \ \sin x^{-1} = q\rho \qquad (\rho > 0).$$

Uit de eerste regel van (4) blijkt dan, dat

$$R_2(x) = p\rho - x\,q\rho,$$

zodat $\frac{R_2(x)}{\rho}$ een breuk is met noemer a; evenzo blijkt dan uit de tweede regel, dat $\frac{R_3(x)}{\rho}$ een breuk is met noemer a^2, enz. We vinden in het algemeen, dat $\frac{R_n(x)}{\rho}$ een breuk is met noemer a^{n-1} $(n=2,3\ldots,)$ zodat $\frac{a^n R_n(x)}{\rho}$ geheel is.

Uit (5) volgt echter

$$\left| R_n(x) \right| < \frac{A^n}{n!}$$

waar A een positief getal is, dat niet van n afhangt. Voor voldoend grote waarden van n is dus

$$\left| \frac{a^n R_n(x)}{\rho} \right| < 1 \quad , \text{ d.w.z. } R_n(x) = 0.$$

Is echter voor een bepaalde waarde van n zowel $R_n(x)$ als $R_{n+1}(x)$ nul, dan volgt uit het algorithme (4) succesievelijk $R_{n-1}(x) = 0$, $R_{n-2}(x) = 0$, ..., dus tenslotte

$$R_1(x) = \sin x^{-1} = 0, \; R_o(x) = \cos x^{-1} = 0,$$

wat een tegenspraak oplevert.

Wegens $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$ volgt dus, dat π niet rationaal kan zijn.

3. Kiest men $x = \frac{2}{\pi}$, dan is $\cos x^{-1} = 0$, $\sin x^{-1} = 1$ en men vindt in dit geval uit (4)

$$R_2(x) = \cos x^{-1} - x \sin x^{-1} = -x,$$

$$R_3(x) = \sin x^{-1} + 3 x R_2(x) = 1 - 3 x^2$$

$$R_6(x) = R_4(x) - 9 x R_5(x) = -15 x (1 - 28 x^2 + 63 x^4).$$

Aan de andere kant volgt uit (5)

$$\left| R_6(x) \right| < 2^5 \frac{5!}{0!11!} x^{-6},$$

We mogen dus verwachten, dat een wortel van $1 - 28 x^2 + 63 x^4 = 0$ dicht bij $\frac{2}{\pi}$ ligt. De vergelijking $x^4 - 28 x^2 + 63 = 0$ heeft als wortels $\pm \sqrt{14 \pm \sqrt{133}}$. Zo vinden we als benadering voor π

$$p = 2\sqrt{14 - \sqrt{133}} = 3,14161\ldots,$$

terwijl $\pi = 3,14159\ldots$

Wegens

$$p = 2\sqrt{14 - \sqrt{13^2 - 6^2}}$$

geeft dit aanleiding tot een benaderde kwadratuur van de cirkel.

4. Neemt men in § 1 aan, dat $a_o^{(0)} > 0$ en dat ook de determinanten $D_1, \ldots, D_n$ positief zijn, dan blijkt uit de betrekking (3) $D_\nu = a_o^{(1)} a_o^{(2)} \ldots a_o^{(\nu)}$, dat $a_o^{(1)}, a_o^{(2)}, \ldots a_o^{(n)}$ positief zijn, zodat in

dit geval

$$(6)\quad \begin{cases} R_o(x) = p_1\, x\, R_1(x) + R_2(x) \\ \text{-----------------------------} \\ R_{n-1}(x) = p_n\, x\, R_n(x) + R_{n+1}(x), \end{cases}$$

waar nu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ positieve getallen voorstellen.

Dit stelt ons in staat om met onze methode een bekend resultaat van Hurwitz over de nulpunten van een veelterm

$$B(x) = b_o\, x^n + b_1\, x^{n-1} + \ldots + b_n$$

af te leiden.

Met geringe wijziging kunnen we n.l. de voorgaande theorie toepassen op de beide veeltermen:

$$R_o(x) = b_o\, x^n + b_2\, x^{n-2} + b_4\, x^{n-4} + \ldots$$

$$R_1(x) = b_1\, x^{n-1} + b_3\, x^{n-3} + b_5\, x^{n-5} + \ldots.$$

In dit geval worden de determinanten $D_v (v = 1,2,\ldots)$ gevonden (vgl.(2)) uit de matrix:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_o & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_o & 0 & 0 & \cdots \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_o & \cdots \\ \cdots & & & & & & \end{pmatrix} \qquad (b_v = 0 \text{ voor } v > n).$$

<u>Stel, dat de voorwaarden</u>

$$b_o > 0,\ D_1 = b_1 > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_o \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} > 0, \ldots, D_n > 0$$

<u>vervuld zijn</u>, <u>dan zullen we bewijzen</u>, <u>dat elke wortel van</u> $B(x) = 0$ <u>een negatief reëel deel heeft</u>.

Immers gelden de relaties (6), waarbij $p_1, p_2, \ldots, p_n$ positieve getallen zijn en $R_v(x)$ $(v = 2,3,\ldots, n)$ een veelterm is van de vorm

$$R_v(x) = a_o^{(v)}\, x^{n-v} + a_1^{(v)}\, x^{n-v-2} + \ldots,$$

terijwl $R_{n+1}(x)$ identiek nul is.

We beschouwen nu een willekeurige wortel z van $B(x) = 0$, dan is $R_o(z) + R_1(z) = 0$. Uit $R_1(z) = 0$ zou volgen $R_o(z) = 0$ en dus volgens (6) successievelijk $R_2(z) = 0$, $R_3(z) = 0, \ldots, R_n(z) = 0$. Echter is $R_n(z) = a_o^{(n)} > 0$. Dus $R_1(z) \neq 0$.

Uit (6) volgt nu voor een zeker natuurlijk getal $m \leq n$

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} -1 = \frac{R_o(z)}{R_1(z)} &= p_1 z + \frac{R_2(z)}{R_1(z)} \\ \frac{R_1(z)}{R_2(z)} &= p_2 z + \frac{R_3(z)}{R_2(z)} \\ &\text{-------------------} \\ \frac{R_{m-2}(z)}{R_{m-1}(z)} &= p_{m-1} z + \frac{R_m(z)}{R_{m-1}(z)} \\ \frac{R_{m-1}(z)}{R_m(z)} &= p_m z \end{aligned} \right.$$

Is $p > 0$ en heeft een getal α een reëel deel $\geqslant 0$, dan heeft ook $p\alpha$ deze eigenschap, en, als $\alpha \neq 0$, geldt hetzelfde voor $\frac{1}{\alpha}$.

Passen wij deze eigenschappen herhaald toe, dan volgt uit (7), dat z geen reëel deel $\geqslant 0$ bezitten kan, waarmee de bewering aangetoond is.

Er werd nog op gewezen, dat deze stelling in de theorie der stabiliteit een grote rol speelt.