STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1949-014

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van uit hoger standpunt belicht"

Prof. dr. F. Loonstra

Het begrip "orde" in de wiskunde.

Rapport Z.W., 1949-014

7 December 1949.

Voordracht door Prof. Dr F. Loonstra
in de serie
Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

Het begrip "orde" in de wiskunde.

§1. Inleiding.

De wiskunde hecht aan het begrip "orde" een betekenis, die het beste door "rangschikking" kan worden omschreven.

Definitie: Een verzameling M wordt (enkelvoudig) geordend genoemd, wanneer voor elk tweetal elementen een relatie bestaat, die wordt voorgesteld door het symbool $\subseteq$ (uitgesproken: "is bevat in", "is kleiner dan", "is deel van" of "gaat vooraf aan", enz.) en die aan de volgende voorwaarden voldoet:

1^o. $a \subseteq a$; 2^o. $a \subseteq b$ en $b \subseteq a$ sluit in: $a = b$; 3^o. $a \subseteq b$, $b \subseteq c \longrightarrow a \subseteq c$.

Opmerking: Wanneer $a \subseteq b$ en $a \neq b$, schrijven we $a \subset b$.

Voorbeelden:

1. De rij der natuurlijke getallen 1,2,3,..., waarin men aan $a \subseteq b$ de betekenis van $a \leq b$ toekent. We spreken in dit geval van de natuurlijke getallen in hun natuurlijke volgorde.
2. De rij der natuurlijke getallen als volgt gerangschikt: 1,3,5,..., 2,4,6,...
3. De verzameling van de getallenparen $(m;n)$, waarin m en n gehele getallen voorstellen, terwijl $(m_1;n_1) \subseteq (m_2;n_2)$, wanneer $m_1 \subset m_2$ òf $m_1=m_2$, $n_1 \subseteq n_2$ (ordening naar de eerste verschillen of lexicographische ordening).

Een willekeurige gegeven verzameling behoeft niet geordend te zijn. Op de vraag, of het mogelijk is een gegeven verzameling steeds te ordenen, volgt straks het antwoord. Voor geordende verzamelingen bestaat een begrip, dat het karakter van gelijkheid voor geordende verzamelingen betreft.

Definitie: Men noemt twee geordende verzamelingen M en N geordend isomorph wanneer het mogelijk is om M en N een een-duidig op elkaar af te beelden, terwijl die afbeelding de orderelaties onveranderd laat, d.w.z. als $m_1 \leftrightarrow n_1$ en $m_2 \leftrightarrow n_2$ en $m_1 \subseteq m_2$, dat dan ook $n_1 \subseteq n_2$ (en omgekeerd moet uit $n_1 \subseteq n_2$ ook volgen $m_1 \subseteq m_2$) Schrijfwijze $M \simeq N$.

Geordend isomorphe verzamelingen zijn dus steeds gelijkmachtig. Alhoewel echter de geordende verzamelingen $M = (1,2,3,4,\ldots)$ en $N = (\ldots,3,2,1)$ gelijkmachtig zijn, zijn ze geenszins geordend-isomorph, want het beeld van 1 (uit M) moet in N een element zijn, dat aan alle cijfers van N voorafgaat.

Twee eindige verzamelingen, die gelijkmachtig zijn (dus evenveel elementen bevatten) zijn ook steeds geordend-isomorph, hoe men ze ook rangschikt. Evenals gelijkmachtige verz. door hetzelfde kardinaalgetal worden gekenmerkt, heeft men voor geordend-isomorphe verzamelingen afgesproken: Twee eindige verzamelingen "bezitten hetzelfde ordetype" dan en slechts dan als ze geordend-isomorph zijn. Omdat twee gelijkmachtige eindige verzamelingen steeds geordend-isomorph zijn, komen met de eindige kardinaalgetallen omkeerbaar eenduidig de ordetypen van de eindige verzamelingen overeen; deze eindige ordetypen kunnen we dus aanduiden door 1,2,3,... enz. Hieruit ziet men duidelijk de dubbele betekenis van de natuurlijke getallen, n.l. als kardinaalgetal en als ordetype. Het ordetype van de natuurlijke getallen (in de natuurlijke volgorde) wordt aangeduid door ω, het ordetype van de verzameling $(\ldots 3,2,1)$ door $^*\omega$. Algemeen: is μ het ordetype van een geordende verzameling M, dan is $^*\mu$ het ordetype van de verzameling, die door omkering van de orde van M ontstaat. Het ordetype van de rationale getallen (in de na-

tuurlijke volgorde) duidt men aan door η, dat van de reele getallen (in de natuurlijke volgorde) door λ .
Een soortgelijke ordening van de ordetypen, zoals dat voor de kardinaalgetallen mogelijk blijkt te zijn, is niet mogelijk. Twee ordetypen zijn in het algemeen onvergelijkbaar. Een bijzondere verzameling van de ordetypen, de zg. ordegetallen blijken wel voor ordening vatbaar te zijn (daarover straks).

II. Bewerkingen.

Optelling van ordetypen: Zijn M en N twee geordende verzamelingen, zonder gemeenschappelijke elementen, dan verstaan we onder M+N de geordende verzameling, bestaande uit de elementen van M en die van N, terwijl 1^o de ordening van de elementen van M onveranderd blijft, evenals die van de elementen van N, 2^o elk element van M aan elk element van N voorafgaat. Is μ het ordetype van M, ν dat van N, dan verstaan we onder $\mu+\nu$ het ordetype van M+N. Deze definitie van $\mu+\nu$ blijkt onafhankelijk te zijn van de keuze van de representanten van beide ordetypen. Voorbeelden: $1 + \omega = \omega$; $1 + \omega \neq \omega + 1$; voor eindige n geldt: $n + \omega = \omega$ en $^*\omega + n = {}^*\omega$
Het ordetype van (1,3,5,...2,4,6,...) is $\omega + \omega$. De optelling is associatief, in het algemeen niet commutatief.
Vermenigvuldiging van ordetypen: Zijn M en N twee geordende verzamelingen zonder gemeenschappelijke elementen, μ en ν hun ordetypen. Onder het"geordende product" N x M verstaat men de geordende verzameling van de paren (m;n), waarin m uit M, n uit N, terwijl de ordening naar de eerste verschillen geschiedt. Onder het product $\nu \times \mu$ van de ordetypen μ en ν verstaat men (per definitie) het ordetype van het geordende product N x M van twee representanten. De productvorming is associatief, maar niet steeds commutatief (b.v. is $2 . \omega \neq \omega . 2$). De distributieve wet geldt niet, als de eerste factor een som is, wel als de tweede factor een som is.

III. Eigenschappen van de geordende verzamelingen.

Heeft een geordende verz. geen eindelementen, dan noemt men de verz. open. Een open verz. is dus niet eindig. Een open verz. kan slechts met een open verz. geord.-isom- zijn. Vb. van open verz.: het type $^*\omega + \omega$
Hebben twee elementen m_1 en m_2 van een geordende verz. M de eigenschap dat tussen hen geen element van M ligt, dan heten ze naburige elementen; is $m_1 \subset m_2$, dan noemen we m_1 voorganger van m_2 en m_2 opvolger van m_1.
Een geord. verz. heet dicht geordend, wanneer hij minstens twee elementen bevat en geen naburige elementen bevat. De laatste voorwaarde kan men ook vervangen door: tussen elk tweetal elementen van de verz. ligt minstens nog een element van de verz. Een dichtgeordende verz, kan slechts met een dichtgeordende verz. geord.-isom. zijn. Door G.Cantor is bewezen: Alle open en tevens dichtgeordende verz., die aftelbaar zijn, zijn geordend-isom. Daarmee is de (op de natuurlijke wijze geord.) verz. van de rationale getallen gekarakterizeerd zonder van deze getallen gebruik te maken. Voor de reële getallen bestaan ook eenvoudige kenmerken (zie: E. Kamke, Mengenlehre en A.Fraenkel:, Einleitung in die Mengenlehre).

Welgeordende verzamelingen.

De natuurlijke getallen, geordend op de natuurlijke wijze, hebben de eigenschap, dat elke niet-lege deelverz. een eerste element bezit, een eigenschap, die een geordende verz. in het algemeen niet bezit.
Definitie. Een geordende verz. M, die de eigenschap bezit, dat elke niet-lege deelverz. een eerste element bevat, heet een welgeordende verz. In het bijzonder heeft dus M een eerste element. Elke eindige verz. is welgeordend , de verz. (...3,2,1) is niet welgeordend.
In een welgeord. verz. heeft elk element een opvolger. Het geordend-isomorphe beeld van een welgeord. verz. is weer een welgeordende verz.

Onder een ordegetal verstaat men het ordetype van een welgeord. verz. Voor een eindige verzameling vallen de begrippen kardinaalgetal, ordetype en ordegetal samen. Voor oneindige verzamelingen kunnen bij eenzelfde kardinaalgetal verschillende ordetypen optreden. Zoals het mogelijk is om kardinaalgetallen te ordenen, zo blijkt het ook mogelijk te zijn om ordinaalgetallen op een "natuurlijke"wijze te ordenen, zodat voor elk tweetal ordegetallen hoogstens één van de relaties $\mu \subset \nu$ $\mu = \nu$ of $\mu \supset \nu$ geldt. Daarbij wordt afgesproken $\mu \subset \nu$, wanneer voor twee representanten M en N (met ordegatallen μ en ν) geldt: M is geordend-isomorph met een deelverz. van N, bestaande uit de elementen, die aan een zekere n van N voorafgaan. Georg Cantor zag de mogelijkheid om voor elke verz. een welordening tot stand te brengen als een denknoodzakelijkheid. Een werkelijk bewijs van de z.g. welordeningsstelling gaf E. Zermelo in 1904.

V. Enkele toepassingen.

Geordende verzamelingen ontmoeten we op velerlei terrein in de wiskunde. Voor de opbouw van de meetkunde is het noodzakelijk, dat axioma's betreffende de ordening van de punten op een lijn worden ingevoerd. In de meetkunde nu wordt meestal het begrip ordening ingevoerd met behulp van het begrip "is gelegen tussen". Euclides spreekt noch van het een noch van het andere begrip. Het schijnt, dat eerst Gausz (in een brief aan Bolyai) in 1832 voor de opbouw van de meetkunde de noodzaak inzag van een behoorlijke formulering van deze begrippen. Wij danken echter aan M. Pasch (Vorlesungen über neuere Geometrie) het eerste stelsel axioma's, dat deze relaties kenmerkt. Daarna wijdden Peano, Veronese, Hilbert en anderen opnieuw aandacht aan dit onderwerp.
Voor de z.g. "tussenaxioma's" raadplege men B.L. van der Waerden, De logische grondslagen der euklidische meetkunde (P.Noordhoff,Groningen).

In de algebra treden geordende verzamelingen op, terwijl dan meestal nog betrekkingen tussen de bewerkingen en de ordening verondersteld worden te bestaan. Zo verstaat men onder een geordende groep een groep, waarvan de elementen enkelvoudig geordend zijn, terwijl uit $a \subset b$ en voor elke c geldt: $a.c \subset b.c$. Onder een geordend lichaam verstaat men een lichaam waarvan de elementen een enkelvoudig geordende verzameling vormen, terwijl uit $a \subset b$ en voor elke c geldt $a+c \subset b+c$, terwijl voor $o \subset c$ bovendien geldt: $ac \subset bc$.
Voor verdere onderzoekingen over geordende verzamelingen in de algebra raadplege men de litteratuur in B.L.v.d.Waerden, Moderne Algebra I.
De onderzoekingen van de laatste twintig jaar hebben een merkwaardig feit aan het licht gebracht, n.l. dat men in verschillende takken van de wiskunde dezelfde eenvoudige en fundamentele betrekkingen tussen de elementen, waarmee men zich bezig houdt, ontmoet. Men komt ze tegen in de verzamelingsleer, in de groepentheorie, in de getallentheorie, in de projectieve meetkunde, in de topologie, in de waarschijnlijkheidsrekening, in de wiskundige logica, in de quantenmechanica, etc.
Het gaat hier in het bijzonder om de relatie van geheel tot deel of om andere relaties, die dezelfde formele eigenschappen hebben als eerstgenoemde. We weten nù, dat het juist diè relaties zijn, die aan de elementaire opbouw van al deze gebieden van de wiskunde ten grondslag liggen. Eerst een twintigtal jaren geleden zien we voor het eerst een doelbewuste ontwikkeling van een algemene theorie over deze relaties in de wiskunde; nauwkeuriger gezegd: een studie van de verzamelingen, waarvan de elementen onderling verbonden zijn door deze relaties. De eerste schreden op dit pad zijn van Dedekind (1900), die aan dergelijke verzamelingen de naam duaalgroep gaf; een systematische studie werd eerst veel later ondernomen, door Menger (1928), die de naam "systeem van dingen" bedacht, door G. Birkhoff (1933), die de voorkeur gaf aan de naam "lattice" en

die over dit onderwerp zijn "Theory of lattices" schreef, door O.Ore (1935), die over"structure" spreekt, evenals de Fransen, terwijl de Duitse litteratuur van "Verband" spreekt. Men moet een structuur (of net-werk) opvatten als een verzameling van elementen, aangeduid door S, die aan de volgende eisen voldoet:
1. S bevat paren elementen a en b, waarvoor een relatie $a \subsetneq b$ bestaat, zodanig, dat $a \subsetneq a$, uit $a \subsetneq b$, $b \subsetneq a$ volgt a=b, terwijl de relatie verder nog transitief moet zijn. Op grond van deze relaties noemt men S een gedeeltelijk geordende verzameling. Men dient nl. te bedenken, dat niet voor elk paar elementen van S een orderelatie behoeft te bestaan. Zij M bv. een verzameling, dan wormen de deelverzamelingen van M een gedeeltelijk geordende verzameling, wanneer de orderelatie hier de betekenis van inclusierelatie heeft.
In vele gedeeltelijk geordende verzamelingen blijkt, dat voor elk paar elementen a en b uit S, al bestaat er ook geen orderelatie voor hen, een paar elementen in S bestaan met eigenschappen, die ons het recht geven om er de namen product en som aan te geven. Daarom worden de volgende voorwaarden gesteld:
2. Voor elk tweetal elementen a en b bestaat een element a.b van S, het product van a en b, zodanig, dat $a.b \subsetneq a$, $a.b \subsetneq b$ en dat elk element c, dat zowel aan a als aan b voorafgaat, ook aan hun product voorafgaat;
3. Voor elk tweetal elementen a en b van S bestaat een element a+b, eveneens van S, genaamd de som, zodanig, dat zowel a als b aan a+b voorafgaat, terwijl elk element c, dat door a zowel als door b wordt voorafgaan, ook door hun som wordt voorafgegaan.
De voorbeelden van verzamelingen met deze eigenschappen liggen voor het grijpen:
De deelverzamelingen van de ruimte voldoen aan alle eisen; de verzameling van alle ondergroepen of van alle normaaldelers van een groep G; in de wiskundige logica de verzameling van alle uitspraken. Deze laatste structuur is bovendien de eerste, die onderwerp van studie was, nl. door Boole (1847) en door Peirce (1867).

x x x