STICHTING

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

ZW 1951 - 014

Over een vermoeden betreffende de entropie

H.J.A. Duparc en Dr. W. Peremans

1951

Over een vermoeden betreffende de entropie.

H.J.A.Duparc en Dr W.Peremans.

Zij gegeven een vorm

$$P=\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}\left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1}\ldots\left(\frac{n_k}{n}\right)^{n_k},$$

waarbij $n_1+\ldots+n_k=n$. Vervangt men elke faculteit in deze formule door de benadering van Stirling

$$a!=\sqrt{2\pi}\,e^{-a}a^{a+\frac{1}{2}},$$

dan gaat de uitdrukking P over in de uitdrukking

$$Q=(\sqrt{2\pi})^{1-k}(n_1n_2\ldots n_k)^{-\frac{1}{2}}.$$

Zij verder de grootheid H gedefinieerd door

$$nH=-n_1\log n_1\ldots-n_k\log n_k+n\log n.$$

Stel nog $p_1=\frac{n_1}{n}$,...., $p_k=\frac{n_k}{n}$. Dan heeft men

$$Q=(2\pi\cancel{n})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k}A^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}k},$$

waarin $A=p_1p_2\ldots p_k$, en

$$H=-p_1\log p_1-\ldots-p_k\log p_k,$$

dus

$$B=e^{-H}=p_1^{\,p_1}\ldots p_k^{\,p_k}.$$

Indien de grootheden $n_1,\ldots,n_k$ wijzigingen ondergaan, waarbij echter hun som n constant blijft, zodat hierdoor ook A, B, P, Q en H wijzigingen ondergaan, die wij met dA,...,dH aanduiden, wordt gevraagd te onderzoeken of:

1°: de wijzigingen van Q en H (of wat op hetzelfde neerkomt: van A en B) tegengesteld teken hebben;

2°: de wijzigingen van P en H tegengesteld teken hebben.

De bewering 1° is voor k=2 inderdaad juist, want dan heeft men

$$A=p_1(1-p_1);\quad B=p_1^{\,p_1}(1-p_1)^{1-p_1}$$

dus

$$\frac{dA}{dp_1}=1-2p_1;\quad \frac{dB}{dp_1}=B\log\frac{p_1}{1-p_1}.$$

Is $p_1 < \frac{1}{2}$ dan is $\frac{dA}{dp_1} > 0$ en $\frac{dB}{dp_1} < 0$; is $p_1 > \frac{1}{2}$ dan is $\frac{dA}{dp_1} < 0$ en $\frac{dB}{dp_1} > 0$.

Voor $k \geqq 3$ is echter de bewering niet juist, zoals uit het volgende blijkt voor $k = 3$. Men heeft dan nl., gebruik makende van $p_1+p_2+p_3=1$,

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp_1}{p_1} + \frac{dp_2}{p_2} + \frac{dp_3}{p_3} = \frac{dp_1(1-2p_1-p_2)}{p_1(1-p_1-p_2)} + \frac{dp_2(1-p_1-2p_2)}{p_2(1-p_1-p_2)}\ .$$

en

$$\frac{dB}{B} = dp_1 \log p_1+dp_2 \log p_2 +dp_3 \log p_3=dp_1 \log \frac{p_1}{1-p_1-p_2} +$$
$$+ dp_2 \log \frac{p_2}{1-p_1-p_2}.$$

De wijzigingen dA en dB kunnen dan en slechts dan voor alle verhoudingen van dp_1 en dp_2 verschillend teken hebben als de determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{1-2p_1-p_2}{p_1(1-p_1-p_2)} & \frac{1-p_1-2p_2}{p_2(1-p_1-p_2)} \\ \log \frac{p_1}{1-p_1-p_2} & \log \frac{p_2}{1-p_1-p_2} \end{vmatrix} = 0$$

is voor alle toelaatbare p_1 en p_2, iets, dat uiteraard niet het geval is.

Bv. bij $p_1=\frac{1}{2}$, $p_2=\frac{1}{3}$, dus $p_3=\frac{1}{6}$ heeft men

$$\frac{dA}{A} = -4dp_1-3dp_2;\ \frac{dB}{B} = \log 3 . dp_1+ \log 2 . dp_2$$

en hebben dA en dB dus hetzelfde teken als

$$-\tfrac{3}{4} < \frac{dp_1}{dp_2} < -\frac{\log 2}{\log 3}\ ,\ \text{dus}\ -0{,}75 < \frac{dp_1}{dp_2} < -0{,}631\ldots$$

Rest ons thans ook het vermoeden 2° te weerleggen.
Men heeft dan

$$P=\frac{n!\,p_1^{np_1}\ldots p_k^{np_k}}{\Gamma(np_1+1)\ldots\Gamma(np_k+1)},$$

dus

$$\frac{dP}{P} = n(1+\log p_1)dp_1+\ldots+n(1+\log p_k)dp_k - n\,\frac{\Gamma'(np_1+1)}{\Gamma(np_1+1)}\,dp_1-\ldots-$$
$$+n\,\frac{\Gamma'(np_k+1)}{\Gamma(np_k+1)}\,dp_k,$$

dus, wegens

$$-\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} = C+\frac{1}{u}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m+u}-\frac{1}{m}\right),$$

$$\frac{dP}{nP} = \log p_1 dp_1+\ldots+\log p_k dp_k+\sum_{k=1}^{k}\left\{\frac{dp_k}{np_k+1}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{dp_k}{m+np_k+1}-\frac{dp_k}{m}\right)\right\}$$
$$= \log p_1 dp_1+\ldots+\log p_k dp_k+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{dp_1}{m+np_1+1}+\ldots+\frac{dp_k}{m+np_k+1}\right).$$

Verder is

$$dH = -dp_1 \log p_1 \ldots - dp_k . \log p_k .$$

Nemen wij allereerst $k=2$, in welk geval het vermoeden wel juist blijkt te zijn. Immers men heeft dan

$$\frac{1}{nP}\,\frac{dP}{dp_1} = \log\frac{p_1}{1-p_1}+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m+n_1+1}-\frac{1}{m+n_2+1}\right)$$
$$= \log\frac{n_1}{n_2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(n_2-n_1)}{(m+n_1+1)(m+n_2+1)}\,;$$

$$\frac{dH}{dp_1} = -\log p_1+\log p_2 = \log\frac{n_2}{n_1}\,.$$

Zonder de algemeenheid te schaden mogen wij onderstellen dat $n_1 > n_2$ is, dus $\frac{dH}{dp_1} < 0$.

Dan is $\frac{dP}{dp_1} > 0$, want men heeft

$$\log\frac{n_1}{n_2} - \left(\frac{1}{n_2+1}+\ldots+\frac{1}{n_1}\right) > 0.$$

Deze formule bewijzen wij op de volgende gronden. Voor $n_1=n_2$ is het linkerlid nul; zij nu de formule bewezen voor $n_1 \geq n_2$ dan tonen wij haar daaruit aan voor n_1+1 in plaats van n_1. Wij hebben dan

$$\log\frac{n_1}{n_2} \geq \frac{1}{n_2+1}+\ldots+\frac{1}{n_1}$$

en weten verder dat $\left(\frac{n_1+1}{n_1}\right)^{n_1+1}$ een monotoon dalende rij is met limiet e, dus $\log\frac{n_1+1}{n_1} > \frac{1}{n_1+1}$, zodat wij na optelling der gevonden ongelijkheden krijgen

$$\log \frac{n_1+1}{n_2} > \frac{1}{n_2+1} + \ldots + \frac{1}{n_1+1} \,.$$

Voor $k \geqq 3$ is het vermoeden evenwel onjuist, hetgeen wij laten zien voor $k=3$. Zowel dP als dH hangen dan slechts af van dp_1 en dp_2. Het vermoeden dat dP en dH steeds tegengesteld teken hebben houdt weer in dat $dH=0$ en $dQ=0$ eenzelfde verhouding van dp_1 en dp_2 opleveren, wat kennelijk niet het geval is. Neem b.v. weer $p_1=\frac{1}{2}$, $p_2=\frac{1}{3}$ dus $p_3=\frac{1}{6}$. Dan is bij $n=6$

$$dH=\log 2.dp_1+\log 3.dp_2+\log 6.dp_3= -\log 3.dp_1- \log 2.dp_2.$$

$$\frac{dP}{6P} =\log 3.dp_1+\log 2.dp_2+ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{dp_1}{m+4} + \frac{dp_2}{m+3} + \frac{dp_3}{m+2}\right)$$

$$=\log 3.dp_1+\log 2.dp_2+ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{dp_1}{m+4} - \frac{dp_1}{m+2}\right)+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{dp_2}{m+3} - \frac{dp_2}{m+2}\right)$$

$$=dp_1\left(\log 3-\frac{1}{2}- \frac{1}{3}\right)+dp_2\left(\log 2-\frac{1}{2}\right),$$

zodat dP en dH hetzelfde teken kunnen krijgen als maar

$$-\frac{\log 2-\frac{1}{2}}{\log 3-\frac{5}{6}} < \frac{dp_1}{dp_2} < -\frac{\log 2}{\log 3}, \quad -0{,}727 < \frac{dp_1}{dp_2} < -0{,}631\ldots$$