STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1954 - 014

Voordracht in de serie
Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht

Dr. W.T. van Est

20 oktober 1954

Groepuitbreidingen en het oppervlakte begrip in de elementaire meetkunden

1954

Voordracht door Dr W.T. van Est in de serie elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht op 20 October 1954.

Groepuitbreidingen en het oppervlakte begrip in de elementaire meetkunden.

1. Groepuitbreidingen.

Gegeven twee groepen G en A. Een groep uitbreiding van G door A is een groep E met homomorphisme Φ (notatie: (E,Φ)) zodat (1) $A \subset E$ (op isomorphie na), (2) Φ homomorphisme van E op G, (3) A is kern van Φ.

We veronderstellen van nu af aan dat A cummutatief is.

Een uitbreiding (E,Φ) van G door A heet centrale uitbreiding als A centrum ondergroep van E is.

We houden ons alleen met centrale uitbreidingen bezig.

De centrale uitbreiding (E,Φ) (van G door A) heet triviaal als E het directe product van G en A is, en Φ het canonieke homomorphisme van E op G.

Een dwarsdoorsnede of selector van een centrale uitbreiding (E,Φ) is een functie $u: G \rightarrow E$ zodat Φu = identieke afbeelding.

De correctie factor van een selector u is de functie f van 2 variabelen op G met waarden in A gedefinieerd door $u(xy) = f(x,y)\, u(x)u(y)$.

Een correctie factor f voldoet aan de functionaal vergelijking (*) $\quad f(x,y)f(xy,z) = f(x,yz)\, f(y,z)$.
Iedere oplossing van (*) heet 2-cocyclus op G met waarden in A. De correctie factoren zijn dus o.a. 2-cocycli.

Stelling. Bij iedere 2-cocyclus f is een centrale uitbreiding (E,Φ) van G door A te vinden en een selector u hiervan zodat f correctie factor van u is.
Bewijs: Laat E zijn de verzameling van alle paren (x,a) , $x \in G$, $a \in A$.
Definieer vermenigvuldiging in E door $(x,a)(y,b) = (xy, f(x,y)\, ab)$. E is dan een groep. Neem $\Phi(\ (x,a)\ ) = x$, en stel $u(x) = (x,1)$.

(E,Φ) is centrale uitbreiding van G door A, waarbij A geïdentificeerd wordt met de verzameling van alle $(1,a)$. u is een selector van (E,Φ) met correctie factor f.

Er bestaat dus geen verschil tussen correctie factoren en 2-cocycli; we houden alleen maar de laatste term aan.

We schrijven de groepoperatie in A voortaan additief. $(*)$ kan dan herschreven worden door

$$(*) \quad f(y,z) - f(xy,z) + f(x,yz) - f(x,y) = 0.$$

Van een functie h van 1 variabele op G met waarden in A wordt de <u>corand</u> δh gedefinieerd door

$$\delta h\,(x,y) = h(y) - h(xy) + h(x).$$

<u>Stelling</u>. Zijn u en u' selectoren van een centrale uitbreiding (E,Φ) met bijbehorende 2-cocycli f en f' dan is $f - f'$ een corand. Verder is bij iedere corand δh een selector u" te vinden zodat $f + \delta h$ bijbehorende 2-cocyclus is.

Neem in het bijzonder de triviale uitbreiding (E,Φ), en voor u het canonieke isomorphisme $G \to E$. Uit bovenstaande stelling volgt dan, dat iedere corand 2-cocyclus is.

De 2-cocycli vormen bij optelling een abelse groep Z waarvan de coranden een ondergroep B vormen. Z/B heet <u>2^c cohomologie groep</u> van G met coëfficiënten in A, of <u>groep van centrale uitbreidingen</u> van G door A.

2. <u>Groepuitbreidingen van Lie groepen.</u> We veronderstellen nu dat G en A Lie groepen zijn. Aan de centrale uitbreidingen (E,Φ) van G door A stellen we dan nog de volgende eisen: (4) E is een Lie groep, (5) A is een afgesloten Lie ondergroep van E, (6) Φ is een continu homomorphisme.

Een centrale uitbreiding (E,Φ) van G door A heet <u>locaal triviaal</u> als er eén omgeving van de identiteit in E is, die direct product is van een omgeving van de identiteit in A en een <u>locale groep</u> $\mathcal{U}$ zodanig dat $\mathcal{U}$ door Φ topologisch op een omgeving van de identiteit in G wordt afgebeeld.

<u>Stelling</u>. Als G enkelvoudig samenhangend is, is een centrale uitbreiding (E,Φ) dan en slechts dan (globaal) triviaal als hij locaal triviaal is.

Bewijs: <u>Noodzaak</u>: Duidelijk.

<u>Voldoende</u>: De door $\mathcal{U}$ voortgebrachte ondergroep $\tilde{G}$ overdekt G. Φ is de "overdekkingsprojectie". Door toepassing van monodromieprincipe kunnen we een continue selector $u : G \to \tilde{G}$ vinden, zodat $u\Phi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. uG is een groep en E is direct product van uG en A.

Stelling. Bij een continue 2-cocyclus f is een centrale uitbreiding (E,Φ) van G door A te vinden en een continue selector u hiervan, zodat f de bij u behorende correctie factor is.

Echter is het in het algemeen niet mogelijk om bij gegeven centrale uitbreiding (E,Φ) een continue selector te vinden. Dus beschrijven de continue 2-cocycli slechts een beperkte klasse van centrale uitbreidingen.

We noteren nog

Stelling. Bij iedere corand δh van een continue functie h hoort een continue selector van de triviale uitbreiding waarvan δh de bijbehorende 2-cocyclus is. Omgekeerd laat iedere 2-cocyclus van een continue selector van de triviale uitbreiding zich voor stellen als een δh met continue h.

3. Homogene functies. Zij V een verzameling waarin G als transformatie groep opereert. Een functie F van n + 1 variabelen op V met waarden in A heet homogeen als $F(gv_0,\dots,gv_n) = F(v_0,\dots,v_n)$ voor iedere $g \in G$, en iedere $v_0,\dots,v_n \in V$.

We nemen nu V = G, en laten G door links vermenigvuldigingen op zichzelf werken. We definiëren een betrekking $F \Longleftrightarrow f$ tussen de inhomogene functies f en homogene functies F op G door de voorschriften

$$F(x_0,\dots,x_n) = f(x_0^{-1}x_1, x_1^{-1}x_2,\dots,x_{n-1}^{-1}\, x_n)$$
$$f(x_1,\dots,x_n) = F(1,x_1,x_1x_2,\dots,x_1x_2\dots x_n).$$

Wanneer G en A beide Lie groepen zijn, worden door de beschreven betrekking continue functies weer in continue functies getransformeerd.

De functionaal operator δ wordt nu homogeen vertaald door een functionaal operator Δ met de definitie vergelijking

$$\Delta H(x_0,x_1,x_2) = H(x_1,x_2) - H(x_0,x_2) + H(x_0,x_1)\ .$$

De functionaalvergelijking $(*)$ voor 2-cocycli wordt homogeen vertaald door de voorwaarde

$$(\divideontimes) \quad F(x_1,x_2,x_3)-F(x_0,x_2,x_3)+F(x_0,x_1,x_3)-F(x_0,x_1,x_2) = 0.$$

4. Oppervlakte in de vlakke meetkunden en centrale uitbreidingen.

(I) We beschouwen het hyperbolische vlak V, en de groep van congruenties(geen spiegelingen!) G_0 van V. G_0 is een Lie groep die als zodanig een enkelvoudig samenhangende overdekkingsgroep G bezit. Laat π het (locaal ééneénduidige) overdekkingshomomorphisme van G op G_0 zijn. G werkt dan op natuurlijke wijze op V door te definiëren $g(x)=\pi(g)(x)$, voor iedere $g \in G$ en $x \in V$. G_0 werkt transitief op V dus werkt G transitief op V. Zij S de ondergroep van G die een vast punt $o \in V$ invariant laat, dan kunnen we V met G /S identificeren.

De functie F gedefinieerd door $F(x_0,x_1,x_2)$ = georiënteerd oppervlak van driehoek x_0,x_1,x_2, is een homogene functie van 3 variabelen op V met waarden in de optelgroep A der reële getallen. Aangezien $V = G/S$ kan men F op natuurlijke wijze als homogene functie op G beschouwen. F voldoet echter aan de voorwaarde (✱) , en definieert dus als zodanig een 2-cocyclus op G met waarden in A, en daarmee een centrale uitbreiding van G door A.

Aan de andere kant weten we dat G_0 en G tot de zgn. klasse van halfenkelvoudige Lie groepen behoren waarvan zich in het algemeen laat aantonen dat iedere centrale uitbreiding door een willekeurige commutatieve Lie groep A locaal triviaal is.

In verband met de stellingen uit §2 moet F dus een corand op G zijn. Door nadere uitwerking blijkt dat deze voorwaarde een andere formulering is van het feit dat het oppervlak van een driehoek in de hyperbolische meetkunde gelijk aan het hoekdefect is.

(II) Dezelfde beschouwing gaat door met betrekking tot het euclidische vlak. Het verschil is echter dat de door het oppervlak geïnduceerde 2-cocyclus tot een <u>niet-triviale</u> centrale uitbreiding aanleiding geeft. Dus het oppervlak is niet als corand voor te stellen, hetgeen overeenstemt met het feit dat in de euclidische meetkunde het oppervlak van een driehoek onafhankelijk is van de hoeken van de driehoek.

(III) In de elliptische meetkunde bestaat geen oriëntering, en dus ook geen georiënteerd tav. congruenties invariant oppervlak. Toch kan men aan deze bezwaren tegemoet komen door het oppervlak van een driehoek als een reëel getal mod 2π te beschouwen. Al het onder (I) gezegde blijft doorgaan. Ook hier is weer wegens het halfenkelvoudige karakter van G_0 en G, het oppervlak een corand op G wat natuurlijk een andere formulering is van het feit dat het oppervlak gelijk is aan het hoekexces.